И. И. Баврин

Математическая обработка информации

ИЗДАТЕЛЬСТВО ПРОМЕТЕЙ

Москва 2016 г.

УДК 51
ББК 22.1я73
Б 135

Баврин И. И.
Б 135 **Математическая обработка информации:** Учебник для студентов всех профилей направления «Педагогическое образование». — М.: Прометей, 2016. — 262 с.
ISBN 978-5-9908018-9-9

Учебник содержит изложение математического аппарата обработки информации, сопровождаемое иллюстрациями из психологии, педагогики, экологии и школьных дисциплин.

Для студентов (бакалавров), специализирующихся в области педагогической науки. Может быть использован студентами других вузов.

ISBN 978-5-9908018-9-9

Содержание

Введение

Современные концепции подготовки высококвалифицированных специалистов ориентированы на гуманизацию и, как следствие этих подходов, гуманитаризацию образования. При этом следует иметь в виду, что духовное становление личности и, в частности, ее умственное развитие невозможно без адекватного специального математического образования, которое должно стать краеугольным камнем в подготовке специалистов любой квалификации, особенно учителей различного, в том числе и гуманитарного, профиля.

Математика едина, т. е. деление математики на чистую и прикладную не может быть строго проведено. Этот принцип предполагает введение в курс обучения математике в высших и средних учебных заведениях изучения, в частности, различных математических моделей реальных явлений.

Математическая модель — это приближенное описание объекта, выраженное с помощью математических символов.

По существу, почти любая тема школьного курса математики заканчивается построением некоторой математической модели, причем для ее построения используются как индуктивный, так и дедуктивный методы. Получая в результате рассуждений некоторую формулу, схему, график, таблицу, чертеж, алгоритм и т. п., мы тем самым имеем дело с построением математической модели. Такие модели широко представлены в настоящем учебнике.

Модель создает условия для активной мыслительной деятельности учащихся в поисках способа решения конкретных задач физики, химии, биологии, экономики. Ситуации, описываемые математическими моделями, возникают во многих других областях знаний.

Математическая модель, основанная на некотором упрощении, никогда не бывает тождественна рассматриваемому объекту, не передает всех его свойств и особенностей, а является его приближенным отражением. Однако благодаря замене реального объекта соответствующей ему моделью появляется возможность математически сформулировать задачу его изучения и воспользоваться для анализа его свойств математическим аппаратом, который не зависит от конкретной природы данного объекта. Этот аппарат позволяет единообразно описать широкий круг фактов и наблюдений, провести их детальный количественный анализ, предсказать, как поведет себя объект в различных условиях, т. е. прогнозировать результаты будущих наблюдений.

В настоящее время при обсуждении проблем школьного математического образования все чаще звучит тезис о гуманитарном потенциале школьного курса математики. Умение составлять математические модели реальных процессов и работать с ними — составная часть общей культуры человека, тем более в настоящее время, в период активной математизации различных отраслей знаний.

Поэтому представляется целесообразным рассмотрение математических моделей уже в курсе средней школы, и следовательно, это тем более необходимо будущему учителю.

Важно, чтобы учащиеся в средней школе и, значит, студенты в педагогическом вузе получили правильное представление о том, что такое математическая модель, в чем состоит математический подход к изучению реальных явлений и как его применять. Это желательно реализовать, прежде всего, на примерах из естественнонаучных дисциплин, что будет способствовать значительному усилению профессиональной и прикладной направленности преподавания математики и развитию межпредметных связей.

Считается, что всякая математическая модель должна удовлетворять двум основным требованиям:

1. Адекватность процессу. Это значит, что модель должна отражать наиболее характерные связи между величинами, участвующими в нем, учитывать свойства среды, в которой он происходит, и информацию о начальном состоянии процесса. Только тогда по поведению модели можно судить о ходе самого процесса.

2. Разрешимость модели. Это значит, что модель должна быть не слишком сложной, чтобы из нее можно было получать интересующую нас информацию.

Процесс математического моделирования, т. е. технологию изучения явлений с помощью математических моделей, можно разделить на четыре этапа.

Первый этап — формулирование законов, связывающих основные объекты модели. Этот этап требует широкого знания фактов, относящихся к изучаемым явлениям, и глубокого проникновения в их взаимосвязи. Завершается он записью в математических терминах сформулированных качественных представлений о связях между объектами модели.

Основным вопросом на втором этапе является получение в результате анализа модели теоретических результатов (теоретические следствия модели) для дальнейшего их сопоставления с экспериментальными данными. На этом этапе важную роль приобретает математический аппарат, необходимый для анализа математической модели, и вычислительная техника.

Третий этап — определение того, удовлетворяет ли принятая модель критерию практики.

Четвертый этап — последующий анализ модели в связи с накоплением данных об изучаемых явлениях и ее модернизация. В ходе развития науки и техники данные об изучаемых явлениях постоянно уточняются, в результате наступает момент, когда выводы, получаемые на основе существующей математической модели, перестают соответствовать нашим знаниям о явлении. Тем самым возникает необходимость построения новой, более совершенной математической модели.

При построении модели явления необходима его идеализация, т. е. отделение условий, существенно влияющих на него, от условий, не оказывающих на него существенного влияния.

Хорошим примером, иллюстрирующим все этапы построения математической модели, является модель Солнечной системы, а также развитие геометрии от Евклида до Лобачевского и механики от Ньютона до Эйнштейна.

Не нужно упускать из вида тот факт, что модель явления всегда беднее самого явления, и именно поэтому математическое изучение природы имеет неограниченные возможности.

Искусство математического моделирования состоит в умении перевести реальную задачу на математический язык, перевести адекватно, не теряя основных свойств оригинала.

Плодотворность метода математического моделирования подтверждена всей человеческой практикой, это великое средство научного исследования, применение которого невозможно отвергать ни в какой конкретной области науки.

Способность моделирования является неотъемлемой частью познавательной деятельности человека. Психологические аспекты моделирования заключаются в способности сознания отражать внешний мир не во всем его многообразии и полноте внешних и внутренних связей, а огрубленно, в приближенном виде.

Та неполная информация о реальном явлении, которую мы приобретаем непосредственно через каналы ощущений и восприятий или опосредованно, опираясь на ранее приобретенные знания, фиксируется в нашем сознании в неполном виде как система представлений и образов, которые по существу являются моделями. Вследствие этого наши представления об окружающем мире носят модельный характер.

Метод математического моделирования представляет особый интерес и в связи с тем, что он синтезирует в себе целый ряд методов научного познания — анализ, синтез, обобщение и специализацию, абстрагирование, конкретизацию, аналогию и другие методы.

За последнее время все более осознается значение модели как продукта психической деятельности. Ряд ученых определяют ее как основной продукт психической деятельности человека в его контакте с окружающей средой. Некоторые исследователи придают моделированию в преподавании настолько большую роль, что выделяют его в отдельный принцип. Так, например, В.В. Давыдов [10], подчеркивая ограниченность традиционного дидактического принципа наглядности, предлагал заменить его принципом моделирования.

Л.М. Фридман, развивая идеи В.В. Давыдова о модельном подходе к изучению математики в средней школе, пишет: «...Принцип моделирования в обучении математике означает, во-первых, изучение самого содержания школьного курса математики с модельной точки зрения, во-вторых, формирование у учащихся умений и навыков математического моделирования различных явлений и ситуаций, наконец, в-третьих, широкое использование моделей как внешних опор для внутренней мыслительной деятельности, для. развития научно-теоретического стиля мышления» [20, с. 58].

Исходя из этого, можно считать обоснованным вывод о том, что обучение будущего учителя математики как непосредственно математическому моделированию реальных процессов, так и методике составления математических моделей является важным условием профессионально-педагогической и прикладной направленности любого математического курса.

Модельное обучение математике в вузе предполагает следующую технологию структуры лекций: 1) перед началом изложения темы предлагается несколько задач, например, физического содержания, отвечающего содержанию этой темы, описывающих качественно различные процессы действительности; 2) построение их математической модели; 3) поиск математических методов ее исследования; 4) возврат к реальным физическим явлениям, которые могут исследоваться с помощью этой модели; 5) прогнозирование возможностей выявления свойств этих процессов.

Технология ведения практических занятий также предполагает умение моделировать изучаемые процессы.

Во многих случаях такой моделью будет дифференциальное уравнение, одним из решений которого является искомая функциональная характеристика процесса. Дифференциальное уравнение моделирует процесс в том смысле, что оно описывает эволюцию процесса, характер происходящих с материальной системой изменений, возможные варианты этих изменений в зависимости от первоначального состояния системы.

Заметим, что многие реальные процессы с помощью дифференциальных уравнений описываются просто и полно. При этом дифференциальные уравнения являются одним из самых мощных средств для математического решения прикладных задач.

Заметим также, что многие далекие по содержанию задачи приводят к одинаковым дифференциальным уравнениям, что свидетельствует, с одной стороны, о единстве природы, а с другой — о силе и общности математических методов. Это продемонстрировано в § 6.5 на примерах из разных школьных дисциплин (физики, химии, биологии).

Большую роль в построении математических моделей, в частности, биологических процессов играют разностные уравнения (см. гл. 6, § 6.1, § 6.2, § 6.3).

Математическое моделирование реальных процессов приводит к естественной (а не искусственной) реализации межпредметных связей, способствующих развитию всех функций обучения: образовательной, развивающей и воспитывающей. Эти функции осуществляются во взаимосвязи и взаимно дополняют друг друга.

Информатика ввела в оборот понятие информационной модели (см. [5]).

Информационная модель — это информация об объекте, процессе, явлении.

Информация — это сведения (сообщения, данные) независимо от формы их представления. Информация — не просто сведения, а сведения нужные, имеющие значение для лица, обладающего ими.

Отметим важные свойства понятия информации.

Информация не является материальным объектом, ее передают от одного человека к другому и первый её не утрачивает. Таким образом, в результате передачи оба эти человека будут владеть переданной информацией, т.е. информация при передаче не уменьшается, а только увеличивается.

Для передачи информация должна быть предоставлена на каком-нибудь материальном носителе.

Содержание информации должно быть неизменным при её переносе с одного носителя информации на другой.

Примеры информационных моделей: словесное описание, схемы, чертежи, карты, рисунки, всевозможные формулы, формулировки законов, алгоритмы и пр.

Математическая модель — это один из видов информационных моделей.

Информационные модели занимают важное место в обучении.

Так, на физике ученики узнают о Боровской модели атома, не имея возможности разглядеть реальный атом. Описание солнечной системы, молекулярные структуры вещества, схема кровеносной системы и многое другое носят характер информационных моделей. Наши знания о реальном мире — это множество информационных моделей.

Информационное моделирование — одно из узловых понятий в информатике, изучающей законы и методы накопления, передачи и обработки информации с помощью компьютерных технологий.

Информационная модель содержит не всю информацию о моделируемых явлениях, а только ту ее часть, которая нужна для рассматриваемых задач. То, что не нужно для решения поставленных задач, при моделировании отбрасывается. Если круг решаемых задач расширяется, то приходится расширять и модель, включать в неё больше информации.

Информационные модели имеют ряд преимуществ перед моделями других видов. Они могут вобрать в себя больше аспектов моделируемой реальности, обеспечивают большую гибкость при проведении экспериментов. При информационном моделировании можно замедлять или ускорять ход времени, сжимать или расширять пространство, выполнять действия, опасные, дорогостоящие или просто невозможные в реальном мире.

Наиболее привычный для нас вид информационного моделирования — словесное описание, то есть описание на естественном (разговорном) языке. Чаще всего такое описание называют текстом (текст книги, текст выступления, пояснительный текст, текст задачи и т.д.)

Обычно встречаемся с неформализованными текстами. Разного рода бланки — это пример формализации текстовой информации. Формализованную информацию обрабатывать намного легче и быстрее.

Рассмотрим математические средства представления информации в формульном виде, табличной форме и форме графа.

В математике формула определяется как комбинация математических знаков, выражающая какое-либо предложение. Например, следующие выражения есть формулы

$3 \cdot 3 = 9$, $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $x_1 \to x_2 = \bar{x}_1 \vee x_2$, $I = U : R$ (закон Ома; R — сопротивление проводника, I — сила тока).

Основное отличие формул от других видов представления информации состоит в том, что она в них представлена в наиболее «свернутом», наиболее компактном виде.

Одной из важнейших задач познания является установление причинно-следственных связей. Наиболее точным воплощением этих связей является функциональная зависимость. Более компактно она выражается на языке формул (например, закон Ома).

Математические формулы возникают, как правило, как результат исследования реальных физических, экономических, социальных систем. Основное их назначение — описание наблюдаемого поведения систем и предсказание свойств и поведения систем за пределами видимых наблюдений.

Понятие функции как математической модели уже давно используется в физике, биологии, химии. Так, путь S, проходимый телом с постоянной скоростью υ, есть функция времени t: $S = \upsilon t$, длина окружности C радиуса r есть функция радиуса r: $C = 2\pi \cdot r$.

Кроме формульного задания функции, на практике часто используется табличный и графический способ задания функций.

В разных вопросах таблицы используются и в данной книге (главы 2, 3, 4, 5, 7, 8), при этом в главе 8 для наглядного представления табличных данных используется их графическое изображение (например, график эмпирической функции распределения, полигон, гистограмма, круговая диаграмма). Для наглядного же изображения соотношений между подмножествами какого-либо универсального множества (глава 1) используют диаграммы Эйлера-Венна (Джон Венн (1834—1923) английский математик).

Графы (глава 4) играют важную роль в прикладных задачах, отдельные из которых рассмотрены в данной книге. Это матрицы и сети (глава 3), составление команды космического корабля, цепь приборов, код Фано (глава 7).

С помощью аппарата алгебры логики (глава 5) изучаются простые и составные высказывания.

Методы теории вероятностей (глава 7) широко применяются и при математической обработке информации, включая построение математических моделей биологических процессов (§ 7.8).

Глава 8 посвящена статистической обработке информации.

Основными объектами, с которыми работает компьютер являются информационные модели.

Основные языки информационного моделирования:

- в общении — естественный язык,
- в познании — язык математики,
- в практической деятельности — формальные языки.

Универсальным языком науки считается в настоящее время язык математики, а математическое моделирование — важный метод исследования и научного описания систем различной природы (физическое, биологическое, техническое и пр.).

Формальный язык — искусственный язык, характеризующийся точными правилами построения выражений и их понимания.

Формальные языки часто конструируются на базе языка математики.

С точки зрения информатики среди формальных языков наибольшее значение играет формальный язык логики (язык алгебры логики) и языки программирования, которые также имеют важное значение.

ГЛАВА 1.
МНОЖЕСТВА

§ 1.1. МНОЖЕСТВА И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ

1. Основные понятия. *Множество* — это совокупность, собрание каких-либо объектов, объединенных общим признаком или свойством (эту фразу нельзя рассматривать как определение понятия «множество», так как в ней слово «множество» заменено столь же неопределенным термином «совокупность»). Объекты, которые образуют множество, называются *элементами* (или *членами)* этого множества. Примерами множеств могут служить: множество всех страниц данной книги (каждая страница является элементом этого множества); множество всех действительных чисел, больших 0 и меньших 1; множество больных в некоторой больнице; множество всех операций (работ) по сборке компьютера.

Множества будем обозначать большими латинскими буквами $A, B, C, \ldots, X, Y, \ldots$, а их элементы — малыми буквами $a, b, c, \ldots, x, y, \ldots$.

Если элемент a является элементом множества A, то пишут $a \in A$ (читается «a принадлежит A», или «a из A»), В этом случае говорят также, что «a содержится в A», «a входит в A» и т. п.

Если a не является элементом множества A, то будем писать $a \,\overline{\in}\, A$ («a не принадлежит A» или «a не содержится в A» и т. п.). Если элементами множества являются числа, то оно называется *числовым.*

Многие из числовых множеств имеют специальные названия и обозначения.

Множество действительных чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a \leq x \leq b$ ($a < x < b$), называется *сегментом* или *отрезком (интервалом)* и обозначается $[a; b]$ ($(a; b)$).

Полусегментом $[a; b)$ ($(a; b]$) называют множество действительных чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a \leq x < b$ ($a < x \leq b$). Множества действительных чисел x, удовлетворяющих условию $x < a$ ($x \leq a$) или $x > b$ ($x \geq b$), обозначаются соответственно $(-\infty; a)$ ($(-\infty; a]$) или $(b; +\infty)$ ($[b; +\infty)$). Множество всех действительных чисел обозначается символом $(-\infty, +\infty)$, или $|x| < +\infty$, или R. Множество всех целых положительных чисел называют *натуральным рядом* (или множеством натуральных чисел) и обозначают N.

Если множество содержит лишь конечное число элементов, то оно называется *конечным.* В противном случае множество называется *бесконечным.*

Например, множество листьев на дереве или множество слушателей в данной аудитории — конечные множества; множества же N, R, $[a; b]$, $(a; b]$, $[a; b)$, $(a; b)$ (при $a \neq b$) — бесконечные множества.

Существуют различные формы задания множества. Наиболее простая состоит в указании всех элементов множества. Так, запись $A = \{1, 2, 3\}$ означает, что множество A состоит из трех элементов: 1, 2 и 3. Если число элементов бесконечно, то используется многоточие. Например, множество всех натуральных чисел записывается так: $N = \{1, 2, 3, ...\}$. Иной способ задания множества состоит в описании элементов определяющим свойством $P(x)$ (формой от x), общим для всех элементов $A = \{x: P(x)\}$. Например, $A = \{x: x = 2k, k \in N\}$ означает, что множество A состоит из четных положительных целых чисел 2, 4, 6, ... Аналогично $B = \{x: 0 < x < 10$ и x — четное$\}$ означает, что B состоит из 2, 4, 6, 8; $C = \{x: x$ — пациент определенной больницы$\}$ означает, что C состоит из пациентов этой больницы.

Если множества A и B состоят из одних и тех же элементов, т. е. если каждый элемент множества A является элементом множества B и, наоборот, каждый элемент множества B является элементом множества A, то множества A и B *равны* (*тождественны, совпадают*). Если множества A и B равны, то пишут $A = B$. Например, $\{1, 2\} = \{2, 1\}$. Равны также и множества

$$A_1 = \{x: 1 < x < 4, x \text{ — целое}\}$$

и

$$A_2 = \{x: x^2 - 5x + 6 = 0\}.$$

Элементы обоих множеств — это целые числа 2 и 3.

Пусть теперь имеются два множества A и B, относительно которых известно только, что каждый элемент множества B является элементом множества A. В этом случае говорят, что B есть *подмножество* A и пишут $B \subset A$ ($\subset$ — *знак включения*). Говорят еще, что «A содержит B» или «B включено в A». В частности, B может совпадать с A.

П р и м е р 1. Множество четных чисел есть подмножество множества целых чисел.

П р и м е р 2. Пусть $A = \{x: x$ — вид животных$\}$, $B = \{x: b$ — вид млекопитающих$\}$. Тогда $B \subset A$.

Т е о р е м а 1. Если $B \subset A$ и $A \subset B$, то $A = B$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из $B \subset A$ следует, что любой элемент из B является элементом множества A, а из $A \subset B$ — что любой элемент из A является элементом множества B, т. е. множества A и B состоят из одних и тех же элементов и, значит, $A = B$.

Обычно приходится рассматривать множества A, B, C и т.д., которые являются подмножествами некоторого достаточно обширного множества, рамки которого определяются целями исследования.

Такое исходное множество называется *универсальным* и обозначается через U. Если изучаются всевозможные числовые множества, то универсальным будет множество всех действительных чисел.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым*. Его обозначают $\varnothing$. Примерами пустого множества могут служить: множество людей на Солнце, множество действительных корней уравнения $x^2 + 1 =0$.

Теорема 2. *Пустое множество является подмножеством любого множества A.*

Доказательство. Из определения подмножества следует, что B является подмножеством A, если B не содержит элементов, не являющихся элементами A. Но пустое множество не содержит ни одного элемента, поэтому оно не содержит и элементов, не принадлежащих A. Отсюда следует, что пустое множество есть подмножество любого множества A.

Подмножества некоторого множества, отличные от него самого и от $\varnothing$, называются *собственными*.

2. Операции над множествами. Пусть даны два множества A и B.

Определение 1. *Объединением* (или *суммой*) этих множеств называется множество C, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A или B.

Обозначение: $C = A \cup B$ (или $C = A + B$). Знак $\cup$ называется *знаком объединения.*

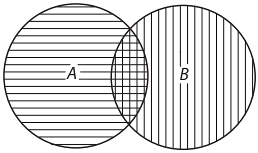


Рис 1.

На рис. 1 изображены два множества точек плоскости — круг A и круг B. Их объединение — это область, покрытая или горизонтальной, или вертикальной штриховкой.

Пример 1. $\{1, 2, 3\} \cup \{2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$.

Пример 2. Определим A как множество курящих мужчин в какой-либо популяции, а B — как множество отцов в этой популяции. Тогда множество $A \cup B$ есть множество всех мужчин в популяции, которые являются либо курильщиками, либо отцами, либо курильщиками и отцами одновременно.

Заметим, что $A \cup A = A$. В общем случае $A \subset (A \cup B)$; так же и $B \subset (A \cup B)$.

Определение 2. *Пересечением* (или *произведением)* множеств A и B называется множество С, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат и множеству A, и множеству B.

Обозначается: $C = A \cap B$ (или $C = AB$). Знак $\cap$ называется *знаком пересечения.*

На рис. 1 пересечение множеств A и B — это область, покрытая и горизонтальной, и вертикальной штриховкой.

Пример 3. $\{1, 2, 3\} \cap \{2, 3, 4\} = \{2, 3\}$.

В условиях примера 2 множество $A \cap B$ есть множество всех мужчин в популяции, которые и курят, и являются отцами одновременно.

Заметим, что $A \cap A = A$. В общем случае $(A \cap B) \subset A$ и $(A \cap B) \subset B$.

Для некоторой пары множеств может оказаться, что их пересечение — пустое множество. Так, например, $\{1, 2, 3\} \cap \{5, 6, 7\} = \varnothing$. Пустым будет и пересечение множеств A и B, изображенных на рис. 2.

Определение 3. Множества, пересечение которых пусто, называются *непересекающимися.*

Пример 4. Определим A как множество целых положительных, а B — как множество целых отрицательных чисел. Тогда A и B — непересекающиеся множества, поскольку не существует целых чисел, которые были бы одновременно и положительными, и отрицательными.

Пример 5. Определим A как множество людей старше 20 лет, а B — как множество людей младше 10 лет. Тогда A и B — непересекающиеся множества.

Введенные операции объединения и пересечения множеств легко обобщаются на большее, чем два числа множеств. Так, множество C называется объединением множеств $A_1, A_2, ..., A_n$, если C состоит из всех тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A_k, $k = 1, 2,..., n$. Обозначается $C = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$, или кратко $C = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$.

На рис. 3, *а* изображено объединение множеств A_1, A_2 и A_3 (вся заштрихованная область).

Аналогично множество C называется пересечением или общей частью множеств $A_1, A_2, ..., A_n$, если оно состоит из всех тех элементов, которые принадлежат всем множествам A_k, $k = 1, 2, ..., n$. Обозначается $C = A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n$, или кратко $C = \bigcap_{k=1}^{n} A_k$.

На рис. 3, *б* пересечение множеств A_1, A_2, A_3 — область, покрытая тройной штриховкой.

Введем еще одну операцию — вычитание множеств. Пусть имеются два множества A и B.

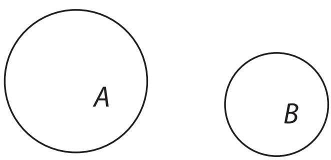


Рис 2.

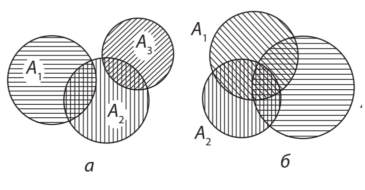


Рис 3.

Определение 4. *Разностью* множеств A и B называется совокупность тех элементов множества A, которые не являются элементами множества B.

Разность множеств A и B обозначается $A \backslash B$. При этом B может содержаться в множестве A полностью, частично или совсем не включаться. На рис. 4 изображены эти три случая. Разность $A \backslash B$ каждый раз заштрихована. Заметим, что в последнем случае, т. е. когда $A \cap B = \varnothing$, разность $A \backslash B = A$. В общем случае $A \backslash B \subset A$.

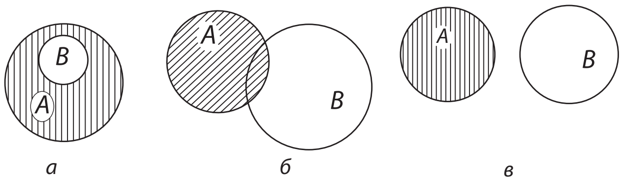


Рис 4.

Если $A \subset B$, то разность $B \backslash A$ называется *дополнением* множества A до множества B. Дополнение некоторого множества A до универсального множества U обозначается $\overline{A}$. Таким образом, если $A \subset U$, то U можно представить в виде объединения двух непересекающихся множеств:

$$U = A \cup \overline{A}.$$

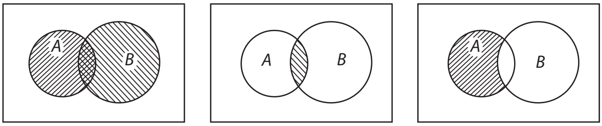
Говорят при этом, что множество U *разбито* на два множества A и $\overline{A}$. Аналогичному *разбиению* можно подвергнуть множество A или множество $\overline{A}$ или то и другое. При этом получим более мелкое разбиение исходного множества U. Этот процесс можно продолжить и далее. В итоге получим представление множества U в виде объединения попарно непересекающихся подмножеств:

$$U = \bigcup_{k=1}^{n} A_k \text{, где } A_i \cap A_j = \varnothing, \text{ если } i \neq j.$$

Типичным примером разбиения множества является классификация живых существ. Все множество живых организмов разбивается, как известно, на типы, типы — на классы, классы — на порядки и т. д. Это, разумеется, не единственное возможное разбиение. Так, например, биофизик, изучающий механизм зрения, разобьет все множество животных не по типам, а по чувствительности к световым сигналам. При таком разбиении в одно множество могут попасть слепые насекомые (например, некоторые виды муравьев) и некоторые позвоночные (например, кроты).

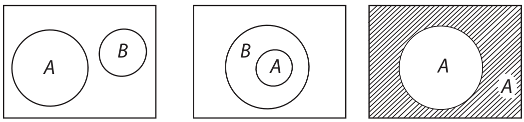
Для наглядного изображения соотношений между подмножествами какого-либо универсального множества используют диаграммы *Эйлера—Венна* (Джон Венн (1834—1923) — английский математик).

Само универсальное множество U изображают в виде прямоугольника, а его подмножества — в виде кругов, расположенных внутри прямоугольника. Множества, полученные в результате операций над множествами A и B, изображены на рис. 5 заштрихованными областями. Непересекающиеся множества изображаются неперекрывающимися областями, а включение множества соответствует области, целиком располагающейся внутри другой (рис. 6, *а*, *б*). Дополнение множества A (до U), т. е. множество $\overline{A}$, изображается той частью прямоугольника, которая лежит за пределами круга, изображающего A (рис. 6, *в*).



а *б* *в*

Рис 5.



а *б* *в*

Рис 6.

3. Алгебра Буля. Введенные операции объединения, пересечения и вычитания (дополнения) множеств подчиняются простым законам. Некоторые из этих законов уже установлены ранее, другие также нетрудно устанавливаются. Приведем сводку этих законов:

I. $\overline{\overline{A}} = A$.

II. $A \cap A = A$, $A \cup A = A$.

III. $A \cap \overline{A} = \varnothing$, $A \cup \overline{A} = U$.

IV. $A \cap U = A$, $A \cup U = U$.

V. $A \cap \varnothing = \varnothing$, $A \cup \varnothing = A$.

VI. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ (*закон де Моргана*);
$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ (*закон де Моргана*).

VII. $A \cap B = B \cap A$ (*коммутативность* $\cap$);
$A \cup B = B \cup A$ (*коммутативность* $\cup$).

VIII. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (*ассоциативность* $\cap$);
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (*ассоциативность* $\cup$).

IX. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (*дистрибутивность* $\cap$ *относительно* $\cup$);

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (*дистрибутивность* $\cup$ *относительно* $\cap$).

Проверим для примера закон де Моргана $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$. Пусть $x \in \overline{A \cup B}$. Тогда $x \in U$ и $x \,\overline{\in}\, A \cup B$. Следовательно, $x \,\overline{\in}\, A$ и $x \,\overline{\in}\, B$. Отсюда $x \in \bar{A}$ и $x \in \bar{B}$ и потому $x \in \bar{A} \cap \bar{B}$. Таким образом,

$$\overline{A \cup B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}. \tag{1}$$

Если теперь $x \in \bar{A} \cap \bar{B}$, то $x \in \bar{A}$ и $x \in \bar{B}$. Отсюда $x \in U$ и $x \,\overline{\in}\, A$, $x \,\overline{\in}\, B$. Значит, $x \,\overline{\in}\, A \cup B$, т. е. $x \in \overline{A \cup B}$. Итак,

$$\bar{A} \cap \bar{B} \subset \overline{A \cup B}. \tag{2}$$

Включения (1) и (2) в силу теоремы 1 (п. 1) и доказывают закон де Моргана.

Пользуясь операциями объединения, пересечения и вычитания множеств, можно из некоторых исходных множеств A, B, C и т. д. получать новые множества: $(A \cup B) \cap \bar{C}$, $(A \setminus \bar{B}) \cup (\bar{A} \setminus C)$, $\bar{C} \cap (A \cup B)$ и т. п. К этим множествам можно применять указанные операции и получать еще более сложные выражения и т. п. Законы I—IX позволяют преобразовывать эти выражения, упрощать их, из одних получать другие. Таким образом, получаем исчисление множеств, или алгебру множеств. Это исчисление является примером так называемой *булевой* алгебры, или алгебры *Буля* (Джордж Буль (1815—1864) — английский математик и логик).

§ 1.2. ОТОБРАЖЕНИЯ И ФУНКЦИИ

Пусть имеются два множества D и E. Это могут быть множества совершенно различной природы. Например, может быть, что D — это множество людей, населяющих земной шар, а E — шкала цветов.

Предположим, что существует правило, по которому каждому элементу из D ставится в соответствие один и только один элемент из E. Тогда это правило называют *отображением множества* D в E (рис. 7).

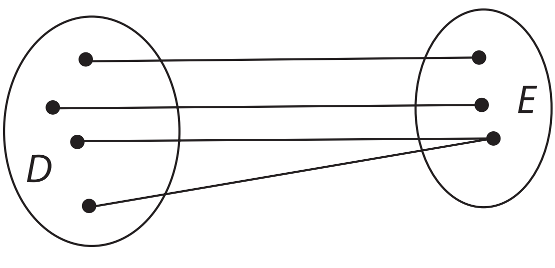


Рис 7.

Например, каждому человеку земного шара можно поставить в соответствие цвет его волос. Так будет определено отображение множества людей в шкалу цветов. Подобно этому можно определить отображение множества людей в множество имен, множества книг в множество языков и т. д. Вместо слова «отображение» говорят также «*функция*» и, если задано отображение множества D в E, то говорят, что *на множестве D задана (определена) функция со значениями в E*. Для обозначения функции будем, как правило, использовать букву f. Эта договоренность не мешает использовать и другие буквы g, h, F, G, и т.п.

Если на множестве D определена некоторая функция f со значениями в E, то общий элемент множества D обозначается обычно x и называется *независимой переменной*, или *аргументом* этой функции, а отдельные конкретные элементы множества D называются *значениями аргумента*. Значения аргумента часто обозначают той же буквой, что и сам аргумент, с прибавлением каких-либо индексов. Например, x_0, x_1, $\tilde{x}$, и т. п. Элемент из E, соответствующий элементу $x \in D$, в силу правила f, называется *значением функции f* на элементе x и обозначается $f(x)$ (читается: «эф от икс»).

Множество D называется *областью определения* функции f. Множество всех элементов $f(x)$, соответствующих элементам $x \in A$, где A — произвольное подмножество множества D, называется *образом* множества A и обозначается $f(A)$. В частности, $f(D)$ называется *областью значений* функции f Область значений $f\,(D)$ есть подмножество множества E, которое в общем случае может и не совпадать со всем E. Если же $f(D) = E$, то говорят что f есть отображение D на E.

Две функции f и g *равны* (*тождественны, совпадают*), если совпадают их области определения и если для любого x из области определения имеет место равенство

$$f(x) = g(x).$$

Подчеркнем еще раз, что в требование равенства двух отображений входит требование совпадения их областей определения.

Пример. Пусть x — элемент какого-нибудь числового множества. Равны ли функции f и g, если

$$f(x) = x + 1, \text{ а } g(x) = -x^3 + 2x + 1?$$

На этот вопрос ответить нельзя, так как не указаны области определения функций. Если в качестве общей области определения взять все множество действительных чисел, то функции f и g не равны, так как, например,

$$f(2) = 3 \neq -3 = g(2).$$

Если же в качестве области определения взять конечное множество $D = \{-1, 0, 1\}$, то f и g, заданные в этой области, окажутся равными.

Рассмотрим некоторые частные виды отображений.

Если область значений $f(D)$ состоит всего из одного элемента, то функцию f называют *постоянной* (рис. 8, *а*). Иными словами, функцию f называем постоянной, если значения ее на всех элементах $x \in D$ равны одному и тому же элементу $a \in E$.

Если *разным* элементам $x \in D$ соответствуют *разные* элементы $f(x) \in E$, то отображение f называют *взаимно однозначным* (рис. 8 б).

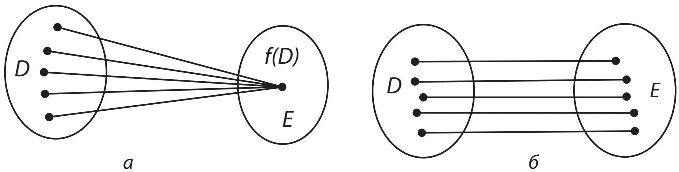


Рис 8.

Примером взаимно однозначного отображения является паспортная система. Каждому человеку, достигшему 14 лет, ставится в соответствие определенный набор паспортных данных (фамилия, имя, отчество, год и место рождения, домашний адрес и т. п.), записанных в его паспорте. При этом разным людям соответствуют разные паспортные данные.

Если f — взаимно однозначное отображение, то каждому элементу $y \in f(D)$ можно поставить в соответствие определенный элемент $x \in D$, именно тот, значение функции на котором равно y. Так будет установлено отображение образа $f(D)$ на множество D. Это отображение называется *обратным* по отношению к f и обозначается f^{-1}.

Если образ $f(D)$ есть подмножество множества D, то говорят, что функция f отображает D *в себя.* Например, функция $f = \sin x$ отображает все множество действительных чисел на подмножество этого множества — промежуток $[-1, 1]$.

В частном случае может оказаться, что функция f каждому элементу $x \in D$ ставит в соответствие сам этот элемент: $f(x) = x$. В этом случае функцию f называют *тождественной.*

Функция, областью значений которой является числовое множество, называется *числовой.* Часто термин «функция» употребляют именно для числовых функций, оставляя для других функций термин «отображение». Особенность числовых функций состоит в том, что в области их значений (т.е. во множестве чисел) имеются операции сложения, вычитания, умножения и деления. Это позволяет ввести аналогичные операции и для числовых функций. Так, например, суммой двух числовых функций f и g, имеющих общую область определения D, назовем функцию h, которая для каждого $x \in D$ определяется как число, равное сумме:

$$h(x)=f(x)+g(x).$$

Аналогично определяются и другие операции. В частности, операция умножения позволяет рассматривать степени функции, например $f^2 = f \cdot f$. Сложнее обстоит дело с частным от деления $\frac{f}{g}$. Чтобы не пришлось делить на нуль, из области определения частного, как правило, исключают те элементы, на которых значения g равны нулю.

Введем еще два важных понятия относительно общих отображений.

Пусть имеются две функции f_1 и f_2 с областями определения D_1 и D_2. Пусть $D_1 \subset D_2$, и для всех $x \in D_1$ выполняется равенство

$$f_1(x) = f_2(x)\cdot$$

Тогда функция f_1 называется *сужением* функции f_2. Таким образом, сужение f_2 — это то же правило f_2, но действующее только на $D_1 \subset D_2$.

Пусть, наконец, f — функция, определенная на D, со значениями в E, а F — функция, определенная на $A \subset E$, со значениями в H. Тогда функция G, определенная на $B \subset D$ таком, что $f(B) = A \cap f(D)$, со значениями в H, действующая по формуле

$$G(x) = F[f(x)],\ x \in B,$$

называется функцией от функции, или *суперпозицией* функций, или *сложной* функцией (рис. 9).

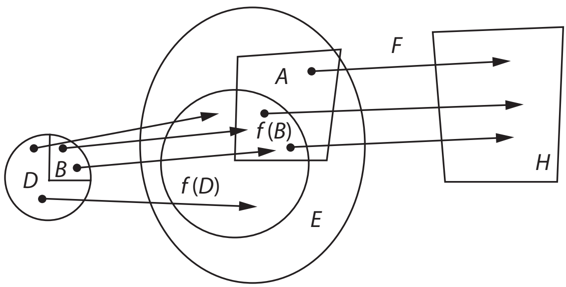


Рис 9.

Упражнения

1. Равны ли множества:
а) {3; 4; 5; 6} и {5; 4; 3; 6};
б) $\{x: x > 0, x^2 \le 4\}$ и $\{x: 0 < x \le 4 - x\}$; в) $\{x: 0 \le x \le 1\}$и $\{x: 3x^2 \le 3\}$.

2. Вместо звездочек напишите знак $\subset$ или знак $\in$, чтобы получилась верная запись:
а) {5; 6}*{5; 6; 8};
б) 5*{5; 6; 8};
в) 2*N.

3. Укажите пустые множества среди следующих множеств:
а) множество целых корней уравнения $x^2 - 9 = 0$;
б) множество целых корней уравнения $x^2 + 16 = 0$;
в) множество целых корней уравнения $x^2 - 5x + 6 = 0$;
г) множество натуральных чисел, меньших 1.

4. Пусть $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ и $B = \{3; 4; 5; 6; 7; 8\}$.
Найдите множества $A \cup B$ и $A \cap B$.

5. Пусть $A = \{2; 4; 6; 8; \ldots; 2n, \ldots\}$, $B = \{1; 3; 5; 7; \ldots; 2n - 1, \ldots\}$.
Найдите $A \cup B$ и $A \cap B$.

6. Пусть $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6)$, $B = \{3; 4; 5; 6; 7; 8)$. Найдите $S = A \backslash B$.

7. Пусть $A = \{1; 2; 3; 4; \ldots\}$ и $B = \{2; 4; 6; 8, \ldots, 2n, \ldots\}$. Найдите $A \backslash B$.

8. Выпишите все подмножества множества $A = \{1; 2; 3\}$.

9. Пусть $A = \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2)$, $B = \{4; 3; 2; 1; 0; -1; -2\}$,
$C = \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$.
Найдите множества: а) $A \cup B$; б) $A \cap B$; в) $A \cup C$; г) $A \cap C$; д) $B \cup C$.

ГЛАВА 2.
КОМБИНАТОРИКА

Комбинаторика — раздел математики, изучающий вопросы о том, сколько комбинаций определенного типа можно составить из данных предметов (элементов)

§2.1 МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ИНДУКЦИЯ

1 Принцип математической индукции. При доказательстве комбинаторных теорем понадобится часто употребляемая теорема, называемая обычно принципом математической индукции.

Как известно, любое конечное множество можно задать перечислением его элементов $A = \{a_1, a_2, ..., a_p\}$. До сих пор не был важен *порядок* следования элементов, и, например, множества $\{a_1, a_2, \ldots, a_p\}$ и $\{a_2, a_1, a_3, ..., a_p\}$ не различали. В дальнейшем будет важен порядок, в котором записаны элементы. Множество, в котором задан порядок следования элементов, называется *упорядоченным.* Таким образом, если множество упорядочено, то каждому элементу приписан свой номер, и можно говорить «первый элемент», «второй элемент» и т. д. Можно сказать также, что в упорядоченном множестве каждому элементу отведено место, на котором он помещается среди других элементов этого множества.

Принцип математической индукции. *Если 1) некоторое утверждение справедливо для* $k = 1$, *2) из справедливости утверждения для произвольного натурального* k *следует его справедливость для* $k + 1$, *то это утверждение справедливо для всякого натурального* n.

Доказательство. Предположим противное, т.е. что при выполнении обоих условий для некоторых натуральных чисел утверждение не выполняется. Пусть m — наименьшее из этих чисел. Это значит, что, во-первых, $m > 1$ и, во-вторых, для $m - 1$ утверждение выполняется, а для m — уже нет. Но это противоречит второму условию. Следовательно, числа m с указанным свойством не существует. Принцип математической индукции доказан.

Приведем пример использования этого метода для доказательства справедливости формулы

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(m-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\ldots m}x^m + \ldots + x^n, \quad (1)$$

где $x > -1$, $x \neq 0$, $n \in N$, *называемой* формулой бинома Ньютона.

Доказательство 1. При $n = 1$ формула (1) очевидна.

2. Пусть при $n = k$ формула (1) верна, т.е.

$$(1+x)^k = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \ldots + \frac{k(k-1)(k-2)\ldots[k-(m-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\ldots m}x^m + \ldots + x^k.$$

Докажем, что тогда верна и формула

$$(1+x)^{k+1} = 1 + (k+1)x + \frac{(k+1)k}{1\cdot 2}x^2 + \frac{(k+1)k(k-1)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{(k+1)k(k-1)\ldots[k+1-(m-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\ldots m}x^m + \ldots + x^{k+1}. \qquad (2)$$

Итак,

$$(1+x)^{k+1} = (1+x)^k(1+x) = \left(1 + kx + \frac{k(k-1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \ldots\right.$$
$$\left.\ldots + \frac{k(k-1)(k-2)\ldots[k-(m-2)]}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(m-1)}x^{m-1} + \frac{k(k-1)(k-2)\ldots[k-(m-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\ldots m}x^m + \ldots + x^k\right)\times$$
$$\times(1+x) = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \ldots + \frac{k(k-1)(k-2)\ldots[k-(m-2)]}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(m-1)}\times$$
$$\times x^{m-1} + \frac{k(k-1)(k-2)\ldots[k-(m-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\ldots m}x^m + \ldots + x^k + x + kx^2 + \frac{k(k-1)}{1\cdot 2}x^3 +$$
$$+ \frac{k(k-1)(k-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^4 \ldots + \frac{k(k-1)(k-2)\ldots[k-(m-2)]}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(m-1)}x^m + \ldots + x^{k+1} = 1 + (k+1)x +$$
$$+ \frac{(k+1)k}{1\cdot 2}x^2 + \frac{(k+1)k(k-1)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \ldots + \frac{(k+1)k(k-1)\ldots[k-(m-2)]}{1\cdot 2\cdot 3\ldots m}x^m + \ldots + x^{k+1},$$

т. е. получаем формулу (2).

3. Учитывая результаты шагов 1 и 2 доказательства и применив принцип математической индукции, считаем формулу (1) доказанной для любого $n \in N$.

2 Слова. Рассмотрим конечное множество первых k натуральных чисел $D = \{1, 2, \ldots, k\}$ и какое-нибудь конечное множество $A = \{a, b, c, \ldots, \upsilon\}$. Множество A будем называть *алфавитом,* а число элементов в множестве A *мощностью* этого множества.

Определим отображение φ на множестве D *со* значениями в A, т.е. каждому натуральному числу $i \in D$ поставим в соответствие один определенный элемент $\varphi(i) \in A$. Последовательность $\varphi(1)$, $\varphi(2)$, ..., $\varphi(k)$ назовем *словом длины k.*

По-иному можно сказать, что имеется упорядоченный набор мест 1, 2, ..., k и чтобы образовать слово, на каждое место помещаем определенный правилом φ элемент из алфавита A.

В дальнейшем, образуя слова, для простоты написания не будем разделять запятыми элементы $\varphi(i)$ в нем. Точно так же образуются слова, которыми пользуемся в нашей речи. Например, из алфавита $A = \{а, б, р\}$ можно образовать слова длины 2: *ба, ар, бр, ра;* слова длины 3: *бра, бар, раб, брр;* слова длины 4: *баба, арба, раба, араб* и т.д. Аналогично из алфавита $A = \{0, 1\}$ можно образовать два слова единичной длины: 0 и 1, слова длины 2: 00, 01, 10, 11; слова длины 3: 000, 001, 010 и т.п.; слова длины 5: 00101, 10001, 10101 и т. д.

Слово длины k будем называть также *k-буквенным словом,* а элементы алфавита — *буквами.* Уже из приведенных примеров видно, что длина k — буквенного слова может быть и меньше, и больше мощности алфавита. Даже в русском языке, алфавит которого состоит из 33 букв, есть слова, длина которых больше 33. Например, научное название акрихина — метоксихлордиэтиламинометилбутиламиноакридин. Это слово содержит 44 буквы.

Два слова, образованные из одного алфавита, одинаковы тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую длину, и на одинаковых местах стоят одинаковые буквы. Сколько всевозможных слов заданной длины k можно образовать из алфавита мощности n, если считать, что все такие слова имеют смысл?

Теорема. *Число всевозможных слов длины k, образованных из алфавита мощности n, равно n^k .*

Доказательство. Пусть a_1, a_2, ..., a_n — элементы алфавита A мощности n. Из этого алфавита можно образовать n различных слов длины 1. Такими словами будут буквы алфавита. Если к каждому из этих слов приписать последовательно каждый из n элементов множества A, то образуются все возможные слова длины 2:

$$a_1a_1, a_1a_2, \ldots, a_1a_n,$$
$$a_2a_1, a_2a_2, \ldots, a_2a_n,$$
$$\ldots\ldots$$
$$a_na_1, a_na_2, \ldots, a_na_n$$

Число таких пар равно n^2, т.е. теорема выполняется для случаев $k = 1$ и $k = 2$.

Предположим теперь, что теорема верна для $i = k - 1$. Это значит, что число различных слов длины $k - 1$, образованных из $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, равно n^{k-1} Покажем тогда, что теорема остается верной и для $i = k$.

Чтобы из множества A образовать все возможные слова длины k, достаточно к каждому слову длины $k - 1$ приписать на последнее место последовательно каждый из n элементов множества A. Таким образом, каждое слово длины $k - 1$ даст n различных слов длины k, и этим способом получим все возможные слова длины k. Поскольку слов длины $k - 1$ имеется n^{k-1} то общее число слов длины k будет равно $n \cdot n^{k-1} = n^k$. Вместе с принципом математической индукции это доказывает теорему.

Например, из алфавита $A = \{0, 1\}$ можно образовать $2^2 = 4$ двухбуквенных слов.

§ 2.2 РАЗМЕЩЕНИЯ, ПЕРЕСТАНОВКИ И СОЧЕТАНИЯ

1. Размещения и перестановки. Образуя слова из алфавита $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, от функции φ требовалась только однозначность. Пусть теперь φ — взаимооднозначное отображение. Это значит, что в слове, образованном с помощью значений этого отображения, нет одинаковых букв. Такие слова называются *размещениями*. Например, из алфавита $A = \{1, 0\}$ можно образовать только два размещения длины 2: 01 и 10. Из алфавита $A = \{1, 2, 3\}$ можно образовать шесть различных размещений длины 2: 12, 21, 13, 31, 23 и 32. Нетрудно установить число различных размещений для данного алфавита и в общем случае. Заметив, что длина размещения не может быть больше мощности алфавита, покажем, что справедлива следующая.

Теорема. *Число различных размещений длины k, образованных из алфавита мощности n, равно $n(n-1)(n-2)... (n-k+1)$.*

Доказательство. Для $k = 1$ теорема верна, так как число однобуквенных размещений равно числу букв в алфавите, т. е. n.

Пусть теорема верна для $i = k - 1$. Это значит, что число размещений длины $k - 1$, образованных из алфавита $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, равно $n(n-1)...(n-k+2)$. Но чтобы получить все размещения длины k, достаточно к каждому размещению длины $k - 1$ приписать поочередно одну из $n - (k - 1)$ букв, не вошедших в это размещение. Таким образом, каждое размещение длины $k - 1$ порождает $n - (k - 1)$ размещений длины k. Следовательно, всего размещений длины k будет

$$n\,(n-1)...(n-\kappa+2)\,[n-(k-1)],$$

что и требовалось доказать.

Число различных размещений длины k, образованных из алфавита мощности n, обозначают A_n^k. Таким образом,

$$A_n^k = n(n-1)...(n-k+1). \qquad (1)$$

Пример 1. Сколько можно составить сигналов из 6 флажков различного цвета, взятых по 2?

Искомое число сигналов $A_6^2 = 6 \cdot 5 = 30$.

Пример 2. Из группы в девять крыс необходимо выбрать трех и поместить их в три клетки, обозначенные C_1, C_2 и C_3. Сколькими способами это можно сделать?

Здесь речь идет о размещении из девяти объектов по три. Согласно формуле (1), число таких размещений равно $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$.

Частным случаем размещений являются *перестановки*. Так называются размещения, длина которых равна мощности алфавита. Например, из алфавита $A = \{1, 2, 3\}$ можно образовать шесть различных перестановок: 123, 132, 213, 231, 312 и 321.

Из формулы (1) при $k = n$ получаем, что число всевозможных перестановок, которые можно образовать из алфавита мощности n (обозначение P_n), равно

$$P_n = n(n-1)...(n-n+2)\,(n-n+1) = n!$$

Пример 3. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, если каждая цифра входит в изображение числа только один раз?

Искомое число трехзначных чисел

$$P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6.$$

Пример 4. Восемь лабораторных животных нужно проранжировать в соответствии с их способностями выполнять определенные задания. Каково число возможных ранжировок, если допустить, что одинаковых способностей нет?

Существует 8! ранжировок по способностям, т.е. $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 40320$.

Пример 5. Имеется n юношей и n девушек. Сколькими вариантами их можно соединить в танцевальные пары?

Чтобы решить эту задачу, выстроим всех юношей в шеренгу и присвоим каждому номер от 1 до n. Тогда ясно, что искомое число вариантов равно числу перестановок из множества девушек, т. е. $n!$

2. Сочетания. Пусть опять имеется некоторое конечное множество мощности n $A = \{a_1\ a_2, ..., a_n\}$. Любое подмножество этого множества, содержащее k элементов, называется *сочетанием из n элементов по k.*

Понятно, что если $k < n$, то из одного и того же множества A мощности n можно образовать несколько различных сочетаний из n элементов по k. Например, из множества $A = \{a_1\ a_2, a_3\}$ можно образовать три различных подмножества, содержащих по два элемента, т. е. три различных сочетания из трех элементов по два: $A_1 = \{a_1, a_2\}$, $A_2 = \{a_1, a_3\}$ и $A_3=\{a_2, a_3\}$.

Понятно также, что число различных сочетаний из n элементов по k зависит от мощности сочетания, т.е. от k и от мощности множества A, т. е. от n. Это число обозначают символом C_n^k (иногда употребляется еще символ $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$). Например, C_n^1 — число различных сочетаний, взятых из n элементов по одному. Ясно, что таких сочетаний будет столько, сколько элементов в исходном множестве A, т. е. n. Таким образом, $C_n^1 = n$.

Далее C_n^2 — это число различных сочетаний, взятых из n элементов по два. Это число легко подсчитать. Если каждый элемент множества $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ поочередно сочетать с каждым из всех остальных, то получатся пары элементов, из которых можно составить таблицу:

$$
\begin{array}{ll}
\{a_1, a_2\} & \{a_1, a_3\} \ldots \{a_1, a_n\} \\
\{a_2, a_1\} & \{a_2, a_3\} \ldots \{a_2, a_n\} \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots \\
\{a_{n-1}, a_1\} & \{a_{n-1}, a_2\} \ldots \{a_{n-1}, a_n\} \\
\{a_n, a_1\} & \{a_n, a_2\} \ldots \{a_n, a_{n-1}\}
\end{array}
$$

В этой таблице n – 1 столбец и n строк. Следовательно, всего выписано $n(n-1)$ пар. Но каждая пара встречается дважды. Так, например, пара $\{a_1, a_2\}$ один раз получается, когда a_1 сочетаем с a_2, а второй раз — при сочетании a_2 с a_1. Таким образом, различных пар, т.е. различных сочетаний из n элементов по 2, будет $\frac{n(n-1)}{2}$. Следовательно, $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$.

В частности, $C_3^2 = \frac{3 \cdot 2}{2} = 3$, в чем убедились непосредственно.

Подсчитаем еще C_n^n и C_n^0. Число C_n^n — это число сочетаний из n элементов по n. Единственным подмножеством множества A, содержащим n элементов, будет само множество A. Следовательно, $C_n^n = 1$. Наконец, C_n^0 — число подмножеств, содержащих 0 элементов, т. е. не содержащих элементов вовсе. Таким подмножеством является только пустое множество (оно содержится во всяком множестве, следовательно, и в A). Таким образом, $C_n^0 = 1$.

Теперь докажем теорему, которая позволит подсчитать любое C_n^k.

Теорема. *Число сочетаний из n элементов по k, где* $0 \le k \le n$, *выражается формулой*

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

или (*при* $k \ne 0$)

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}. \qquad (2)$$

Доказательство. Заметим, что для того чтобы получить всевозможные размещения длины k из алфавита мощности n, достаточно взять всевозможные сочетания из n по k, а затем из каждого сочетания образовать $k!$ всевозможных перестановок. Таким образом,

$$A_n^k = C_n^k k!,$$

откуда

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Пример 1. Из группы в пять мышей нужно выбрать три безотносительно к порядку выбора. Сколькими способами можно это сделать?

Искомое число способов

$$C_5^3 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10$$

Числа C_n^k имеют много важных приложений. Вспомним, например, формулу разложения бинома Ньютона для любого $n \in N$ (см. § 2.1)

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1!}x + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}x^k + \ldots$$
$$\ldots + \frac{n(n-1)\ldots 3 \cdot 2 \cdot 1}{n!}x^n.$$

Сравнив коэффициенты этого полинома с формулой (2), замечаем, что коэффициент при k-й степени равен C_n^k. Таким образом,

$$(1 + x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^n x^n\,. \tag{3}$$

Поэтому числа C_n^k называют *биномиальными коэффициентами.* Из формулы (3) вытекают интересные следствия. Положив, например, в ней $x = 1$, получим

$$C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n. \tag{4}$$

Таким образом, сумма биномиальных коэффициентов равна 2^n, где n — степень бинома.

С другой стороны, слева в формуле (4) написано общее число всех подмножеств множества мощности n. Из формулы (4) следует, что это число равно 2^n.

Заметим еще, что биномиальные коэффициенты удобно вычислять, пользуясь так называемым «треугольником Паскаля»:

$$\begin{array}{ccccccc}
1 & & & & & & \\
1 & 1 & & & & & \\
1 & 2 & 1 & & & & \\
1 & 3 & 3 & 1 & & & \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & \\
1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \\
. & . & . & . & . & . & .
\end{array}$$

Будем считать верхнюю единицу нулевой строкой треугольника. Тогда в n-й строке этого треугольника записаны последовательно биномиальные коэффициенты бинома *n-й* степени (n = 0, 1, 2, …). Каждая следующая строка получается из предыдущей простым способом: коэффициент последующей строки (за исключением первого и последнего, равных единице) пишется под коэффициентом предыдущей строки и полагается равным сумме над ним стоящего и стоящего перед последним, т.е.

$$C_n^{k+1} = C_{n-1}^{k+1} + C_{n-1}^{k}.$$

Докажем эту формулу. Имеем

$$C_{n-1}^{k+1} + C_{n-1}^{k} = \frac{(n-1)!}{(k+1)!(n-1-k-1)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} = \frac{(n-1)!}{k!(n-k-2)!}\left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{n-k-1}\right) =$$
$$= \frac{n(n-1)!}{k!(k+1)(n-k-2)!(n-k-1)} = \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!},$$

что и требовалось доказать.

Заметим, наконец, что $C_n^k = \frac{n!}{n!(n-k)!} = C_n^{n-k}$,

§ 2.3. КОМБИНАТОРИКА И ГЕНЕТИКА

Комбинаторный анализ применяется в тех многочисленных вопросах естествознания, которые связаны с перебором множества возможностей, с выделением из этого множества тех или иных подмножеств. Приведем две простые задачи из генетики.

1. Хорошо известно, что хромосому схематично можно представить как цепочку из генов. При этом свойства хромосомы зависят не только от состава генов, но и от их расположения в цепочке. Существуют методы, позволяющие изменить порядок генов в хромосоме. Возникает вопрос: какое количество хромосом можно получить из данной, изменяя в ней порядок следования генов?

Пусть исходная хромосома состоит из n генов. Обозначим их a_1, a_2,..., ..., a_n и пусть $A = \{a_1\ a_2, ..., a_n\}$. Тогда понятно, что каждая хромосома, имеющая данный набор генов, есть перестановка множества A. Число таких перестановок, как известно, равно n!

2. Пусть имеется n сортов мономеров (например, азотистых оснований). Из этих мономеров образуется полимер, который можно представить как цепочку из k мономеров. При этом k, как правило, больше n, и мономеры в цепочке могут повторяться.

Какое количество различных полимеров длины k можно образовать из данных n сортов мономеров? Будем считать набор мономеров алфавитом из n элементов. Тогда каждый полимер, состоящий из k мономеров, есть слово длины k. Число таких слов, как известно, равно n^k, а число различных полимеров будет в два раза меньше, так как, например, молекулы $a_1a_2a_3$ и $a_3a_2a_1$ не различают (одна из них превращается в другую, если ее повернуть на 180°).

В частности, если алфавит состоит из 4 азотистых оснований *А, Ц, Г* и *Т* (т.е. $n = 4$), а полимером является ген (средняя длина гена равна 1000 единиц, т. е. $k = 1000$), то число всевозможных генов, которые можно получить из 4 оснований, равно

$$\frac{1}{2}n^k = \frac{1}{2}4^{1000} = \frac{2^{2000}}{2} = 2^{1999}.$$

Это громадное число. По некоторым подсчетам оно превосходит общее число атомов в Солнечной системе.

Упражнения

1. Нужно присудить первую, вторую и третью премии на конкурсе, в котором принимают участие 20 человек. Сколькими способами можно распределить эти премии?

2. Сколько четырехбуквенных «слов» можно образовать из букв слова «причем»?

3. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, если каждая цифра входит в изображение числа только один раз?

4. Сколькими способами группа из шести человек может расположиться в ряд?

5. Сколькими способами можно выбрать две детали из ящика, содержащего 10 деталей?

6. У шести мальчиков в классе имеются признаки инфекционного заболевания. Чтобы проверить наличие заболевания, требуется взять выборочный анализ крови у двух мальчиков. Сколькими способами можно это сделать?

ГЛАВА 3.
МАТРИЧНЫЙ АНАЛИЗ

§ 3.1. МАТРИЦЫ И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ

1. Понятие о матрице. Таблица чисел a_{ij} вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

обозначаемая кратко

$$(a_{ij})\ (i = 1, 2, 3, \dots, m;\ j = 1, 2, 3, \dots, n),$$

состоящая из m строк и n столбцов, называется *матрицей* размера $m \times n$. Числа a_{ij} называются ее *элементами*. Это *прямоугольная* матрица. В частности, когда $m = 1$, $n > 1$, имеем однострочечную матрицу $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, которую называют *матрицей-строкой*. Если же $m > 1$, а $n = 1$, то имеем одностолбцовую матрицу, которую называют *матрицей-столбцом*. Матрица, состоящая из одного числа, отождествляется с этим числом.

Пример. Пять лабораторных животных кормят тремя различными видами пищи. Если определить c_{ij} как суточное потребление i-го вида пищи j-м животным, то

$$C = \left(c_{ij}\right) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} \end{pmatrix}$$

является матрицей размера 3×5, отражающей общее суточное потребление. Она дает удобный способ ведения записей.

Если в матрице число строк равно числу столбцов ($m = n$), то такую матрицу называют *квадратной*, причем число ее строк или столбцов называется *порядком* матрицы. Например, матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

есть квадратная матрица второго порядка, а матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

есть квадратная матрица третьего порядка.

Элементы a_{11} a_{22}, ..., a_{nn} квадратной матрицы (a_{ij}) порядка n, называемые *диагональными элементами*, образуют ее *главную диагональ*. Если все недиагональные элементы квадратной матрицы равны нулю, то эта матрица называется *диагональной*.

Матрицу для краткости будем обозначать одной буквой. Например, буквой A.

Две матрицы A и B называются *равными* ($A = B$), если они одинакового размера (т.е. имеют одинаковое число строк и одинаковое число столбцов) и их соответствующие элементы равны. Так, если

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix},$$

то $A = B$, если $a_{11} = b_{11}$, $a_{12} = b_{12}$, $a_{21} = b_{21}$, $a_{22} = b_{22}$.

Кроме приведенной выше записи (1), используют и другие способы представления матриц, например,

a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}
a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}
…	…	…	…
a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}

(клеточная запись). При такой записи часто для упрощения нулевые элементы в таблицу не записывают, но при этом имеют в виду, что пустые клетки также содержат числа (нули).

2. Сложение матриц. Матрицы одинакового размера можно складывать.

Суммой двух таких матриц A и B называется матрица C, элементы которой равны сумме соответствующих элементов матриц A и B. Символически будем записывать так: $A + B = C$. Так, если

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix},$$

то их суммой называется матрица

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}.$$

Пример.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 4 \\ 5 & 4 & 10 \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что сложение матриц подчиняется переместительному и сочетательному законам:

$$A + B = B + A;$$
$$(A + B) + C = A + (B + C).$$

Определение. Матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нуль-матрицей* и обозначается (0) или просто 0.

Нуль-матрица при сложении матриц выполняет роль обычного нуля при сложении чисел: $A + 0 = A$.

3. Вычитание матриц. *Разностью* двух матриц A и B одинакового размера называется матрица C, такая, что

$$C + B = A.$$

Из этого определения следует, что элементы матрицы C равны разности соответствующих элементов матриц A и B.

Обозначается разность матриц Aи B так: $C = A - B$.

Пример.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. Умножение матрацы на число. *Произведением* матрицы A на число λ называется матрица, элементы которой равны произведениям числа λ на соответствующие элементы матрицы A.

Отсюда следует, что при умножении матрицы на нуль получается нуль-матрица.

Пример. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдите матрицу $A\lambda + B\mu$.

На основании определения суммы матриц и умножения матрицы на число имеем

$$A\lambda + B\mu = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & 0 & 2\lambda + \mu \\ 2\lambda + 2\mu & 3\lambda + \mu & \lambda + \mu \end{pmatrix}.$$

5. Умножение матриц. Рассмотрим правило умножения двух квадратных матриц второго и третьего порядков. Пусть даны две матрицы

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Произведением матрицы A на матрицу B называется матрица $C = AB$, элементы которой составляются следующим образом:

$$AB=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{pmatrix}.$$

Как видам, элемент матрицы-произведения, находящийся на пересечении i-й строки и k-го столбца, представляет собой сумму парных произведений элементов i-й строки первой матрицы на элементы k-го столбца второй матрицы.

Например, элемент, стоящий во второй строке и первом столбце матрицы произведения AB, равен сумме парных произведений элементов второй строки матрицы A на элементы первого столбца матрицы B.

Это правило сохраняется для умножения квадратных матриц третьего и более высокого порядка, а также для умножения прямоугольных матриц, в которых число столбцов матрицы-множимого равно числу строк матрицы-множителя.

Пример 1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\cdot 5+2\cdot 7 & 1\cdot 6+2\cdot 8 \\ 3\cdot 5+4\cdot 7 & 3\cdot 6+4\cdot 8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}.$$

Пример 2.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\cdot 1+1\cdot 2+0\cdot 2 & 2\cdot 2+1\cdot 1+0\cdot 2 \\ 3\cdot 1+1\cdot 2+1\cdot 2 & 3\cdot 2+1\cdot 1+1\cdot 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}.$$

Пример 3.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2 \end{pmatrix}.$$

Видим, что в результате перемножения двух матриц получается матрица, содержащая столько строк, сколько их имеет матрица-множимое, и столько столбцов, сколько их имеет матрица-множитель.

Рассмотрим еще пример:

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5\cdot 1+6\cdot 3 & 5\cdot 2+6\cdot 4 \\ 7\cdot 1+8\cdot 3 & 7\cdot 2+8\cdot 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix}.$$

С другой стороны, как установлено выше,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, произведение двух матриц, вообще говоря, не подчиняется переместительному закону:

$$AB \neq BA.$$

Можно проверить, что умножение матриц подчиняется сочетательному закону:

$$A(BC) = (AB)C.$$

Отметим любопытный факт. Как известно, произведение двух отличных от нуля чисел не равно нулю. Для матриц подобное обстоятельство может и не иметь места, т. е. произведение двух ненулевых матриц может оказаться равным нуль-матрице.

П р и м е р 4. Если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},$$

то

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 1\cdot(-1) & 1\cdot 1 + 1\cdot(-1) \\ 1\cdot 1 + 1\cdot(-1) & 1\cdot 1 + 1\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

При умножении матриц второго порядка особое значение имеет квадратная матрица

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

При умножении любой квадратной матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ второго порядка на матрицу E снова получается матрица A. Действительно,

$$AE = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}\cdot 1 + a_{12}\cdot 0 & a_{11}\cdot 0 + a_{12}\cdot 1 \\ a_{21}\cdot 1 + a_{22}\cdot 0 & a_{21}\cdot 0 + a_{22}\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Аналогично

$$EA = A.$$

Матрица E называется *единичной матрицей*. Единичная матрица n-го порядка имеет вид

$$E = \left(\begin{array}{c} n\ \text{строк} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \right. \\ \underbrace{\hphantom{1\quad 0\quad 0\quad \dots\quad 0\quad 0}}_{n\ \text{столбцов}} \end{array} \right).$$

Если в матрице (1), обозначаемой буквой A, сделать все строчки столбцами с тем же номером, то получим матрицу

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

называемую *транспонированной* к матрице A.

Если матрица A (квадратная) совпадает со своей транспонированной, то она называется *симметричной* и ее элементы связаны соотношением $a_{ij} = a_{ji}$ (симметрия относительно главной диагонали). Такова, например, матрица

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 3 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

6. Матрицы рационов. Пусть какое-нибудь вещество, необходимое для жизнедеятельности животного, содержится в разных кормах. Для определенности будем говорить о витамине A. Пусть α_i означает количество этого витамина в 1 кг i-го корма ($i = 1, 2, \dots, n$). Тогда однострочечная матрица

$$\alpha = (\alpha_1\ \alpha_2\ \dots\ \alpha_n)$$

дает распределение витамина A по кормам. Предположим, что исследуемое животное съедает в день x_1 кг первого корма, x_2 кг второго корма, ..., x_n кг n-го корма. Тогда общее количество витамина A, получаемого животным в день, есть

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n. \tag{2}$$

Введя обозначение

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

(матрица-столбец потребления кормов в день), с другой стороны, по правилу умножения матриц получим

$$\alpha X = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \left(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n\right) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n,$$

что совпадает с суммой (2).

Рассмотрим теперь более сложный случай. Будем следить не только за расходом витамина *A*, но еще двух витаминов, например *B* и *C*. Пусть матрица

$$M = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_n \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \dots & \gamma_n \end{pmatrix}$$

дает распределение витаминов по кормам. Каждая строка этой матрицы соответствует отдельному витамину, а каждый столбец — отдельному корму. Таким образом, в 1 кг i-го ($i = 1, 2, \dots, n$) корма содержится α_i витамина *A*, β_i витамина *B* и γ_i витамина *C*.

Пусть по-прежнему матрица-столбец

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

— матрица потребления кормов в день. Тогда, желая узнать общий витаминный режим животного в день, следует, очевидно, взять произведение матриц *M* и *X*:

$$MX = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_n \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \dots & \gamma_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n \\ \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_n x_n \\ \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + .. + \gamma_n x_n \end{pmatrix}.$$

В правой части имеем матрицу-столбец, первый элемент которой равен общему количеству витамина *А*, второй — общему количеству витамина *В* и третий — общему количеству витамина *С*, полученному животным в день.

7. Контакты первого и второго порядков в эпидемиологии. Предположим, что три человека заболели заразной болезнью. Вторую группу из шести человек опрашивают с целью выяснения, кто из них имел контакт с тремя больными. Затем опрашивают третью группу из семи человек, чтобы выяснить контакты с кем-либо из шести человек второй группы. Определим матрицу $A = (a_{ij})$ размера 3×6, полагая $a_{ij} = 1$, если j-й человек второй группы находился в контакте с i-м больным из первой группы, и $a_{ij} = 0$ в противном случае. Аналогично определим матрицу $B = (b_{ij})$ размера 6×7, полагая $b_{ij}= 1$, если j-й человек третьей группы находился в контакте с i-м человеком из второй группы, и $b_{ij} = 0$ в противном случае. Эти две матрицы описывают схему контактов первого порядка между группами.

Могло бы, например, оказаться, что

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

В данном случае $a_{24} = 1$ означает, что 4-й человек второй группы находился в контакте со 2-м больным первой группы. Аналогично, $b_{33} = 0$ означает, что 3-й человек третьей группы не соприкасался с 3-м человеком из второй группы.

Нас могут интересовать также непрямые контакты, или контакты второго порядка, между семью людьми третьей группы и тремя больными первой.

Эти контакты второго порядка описывает матричное произведение $C = AB$.

Элемент $c_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{6} a_{ik} b_{kj}$ дает число контактов второго порядка между j-м человеком третьей группы и i-м человеком из группы больных.

Для заданных матриц A и B получаем

$$C = AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Элемент $c_{23} = 2$ показывает, что имеется два контакта второго порядка между 3-м человеком третьей группы и 2-м инфицированным больным. Заметим, что у 6-го человека из третьей группы оказалось 1 + 1+ + 2 = 4 непрямых контакта с зараженной группой. Таких контактов нет только у 5-го человека.

8. Матрицы и сети. Для географии широкий интерес представляет применение матриц при изучении географических сетей. Обратимся здесь к рассмотрению речных сетей. Участок речной сети можно представить в матричной форме согласно числу притоков (ребра), сходящихся в каждой точке их слияния (узловые точки). Для изображения речной сети такая матрица может быть составлена как с использованием ребер, так и узлов.

Идеализированная речная сеть простого вида изображена на рис. 10 в виде графа (см. главу 4). Ребра представлены числами от 1 до 5, а узлы — буквами от *a* до *f*. Ниже показаны матрицы, изображающие данную речную сеть через ребра и узлы:

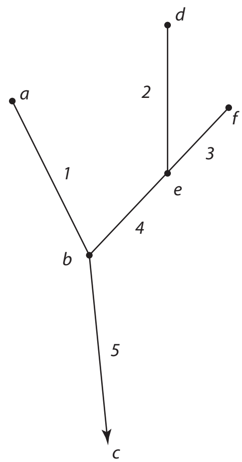


Рис 10.

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & f \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

В матрице ребер ноль означает, что соответствующие притоки непосредственно не соединяются, а единица — что они соединяются. Так, видно, что приток 2 непосредственно сливается с притоками 3 и 4, а не с 1 и 5. В матрице узлов использованы аналогичные обозначения. Например, узел *d* непосредственно связан с узлом *e*, но не связан с другими узлами, а узел *b* связан с узлами *a*, *c* и *e*. Каждая из этих матриц симметрична, но ясно, что этой симметрии для речной сети не может быть в случае, если захотим отразить то простейшее свойство воды, что она не может течь вверх по склону. Тогда мы должны каким-нибудь образом указать, что связь в одном из направлений невозможна. Условие, отражающее этот момент и делающее матрицу несимметричной, состоит в том, что строки представляют собой течение из *a, b, c* и т. д., а столбцы — течение в *a, b, c* и т. д. Поскольку возможны связи только из 1 в 5 или из *f* в *e*, то в каждой матрице некоторые связи утрачиваются. В результате матрицы будут иметь вид

$$\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \\ a\\b\\c\\d\\e\\f \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & f \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Сумма по каждому столбцу дает общее число притоков, впадающих в каждую реку. В нашем случае по два притока — в ребра 4 и 5 и по два — в узлы *b* и *e*.

§ 3.2. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

1. Определители второго порядка. Рассмотрим квадратную матрицу второго порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Определение. *Определителем второго порядка*, соответствующим матрице A, называется число, равное $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Определитель обозначают символом

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \text{ (кратко } |A|).$$

Таким образом,

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \qquad (1)$$

Элементы матрицы A называются *элементами определителя* $|A|$, элементы a_{11}, a_{22} образуют *главную диагональ,* а элементы a_{21}, a_{12} — *побочную.*

Из равенства (1) видно, что для вычисления определителя второго порядка надо из произведения элементов, стоящих на главной диагонали, вычесть произведение элементов, стоящих на побочной диагонали.

П р и м е р 1. Вычислить определитель второго порядка:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 14 - 12 = 2 .$$

П р и м е р 2. Имеем

$$\left|E\right| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 ,$$

т. е. определитель единичной матрицы равен единице.

Легко проверяются следующие свойства определителя (с помощью правила вычисления его по формуле (1)).

Величина определителя $|A|$

1) не меняется, если заменить его строки соответствующими столбцами;

2) не меняется, если к элементам какой-либо его строки или столбца прибавить соответствующие элементы другой строки или столбца, умноженные на одно и то же число;

3) меняет знак, если поменять местами его строки или столбцы;

4) увеличивается в k раз, если элементы какого-либо его столбца или строки увеличить в k раз, т. е. общий множитель, имеющийся в строке или столбце, можно выносить за знак определителя;

5) равна нулю, если элементы какого-либо его столбца или строки равны нулю;

6) равна нулю, если элементы двух строк, или столбцов соответственно равны.

2. Определители третьего порядка. Рассмотрим квадратную матрицу третьего порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

О п р е д е л е н и е. *Определителем третьего порядка,* соответствующим матрице *A,* называется число, равное $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$ $- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$ и обозначаемое символом

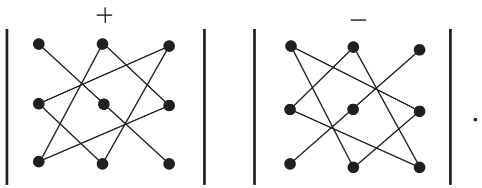
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (\text{кратко } |\mathrm{A}|).$$

Итак,

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} -$$

$$-a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}. \qquad (2)$$

Чтобы запомнить, какие произведения в правой части равенства (2) следует брать со знаком «плюс», какие — со знаком «минус», полезно правило, называемое *правилом треугольника*



Пример 1. По формуле (2) имеем

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 15 + 24 + 24 - 27 - 20 - 16 = 0.$$

Пример 2. Очевидно, что

$$|E| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Все свойства определителей второго порядка (свойства 1—6) остаются справедливыми и для определителей третьего порядка (проверка их идет по формуле (2)).

Определение. *Минором* какого-либо элемента определителя называется определитель, полученный из данного вычерчиванием той строки и того столбца, которым принадлежит этот элемент.

Например, минором элемента a_{12} определителя $|A|$ является определитель второго порядка

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}. \qquad (3).$$

Минор элемента a_{ik} определителя $|A|$ обозначается через M_{ik}.

Определение. *Алгебраическим дополнением* элемента a_{ik} определителя $|A|$ называется его минор, взятый со знаком $(-1)^{j+k}$.

Например, алгебраическим дополнением элемента a_{12} определителя $|A|$ является определитель (3), взятый со знаком «минус». Алгебраическое дополнение элемента a_{ik} будем обозначать через A_{ik}. Следовательно, $A_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik}$.

Теорема 1. *Определитель равен сумме произведений элементов какой-либо строки (столбца) на их алгебраические дополнения.*

Доказательство. Преобразуем правую часть формулы (2). Так как

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} =$$
$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) =$$
$$= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13},$$

то

$$|A| = a_{12}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}. \tag{4}$$

Формула (4) называется *разложением* определителя $|A|$ по элементам первой строки. Аналогично получается разложение по элементам других строк и столбцов.

3. Понятие определителя *n*-го порядка. Свойство определителя третьего порядка, выраженное теоремой 1 (см. п. 2), допускает обобщение, которое может быть принято за определение определителя любого порядка.

В общем случае *определителем n-го порядка,* соответствующим квадратной матрице n-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{5}$$

можно назвать число, равное сумме парных произведений элементов какой-либо строки (столбца) на их алгебраические дополнения (краткое обозначение $|A|$).

Заметим, что определители порядка n обладают всеми полученными выше свойствами (см. пп. 1, 2).

Из свойства 1 (см. п. 1) определителя следует, что квадратная матрица A и транспонированная к ней матрица A' имеют равные определители, т. е.

$$|A| = |A'|.$$

Пример 1. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 4 & -2 & 3 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 4 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 8 - 2 \cdot 39 = -54.$$

Заметим, что если в определителе все элементы какой-либо строки (столбца), кроме одного, равны нулю, то при вычислении определителя выгодно разложить его по элементам этой строки (столбца).

Если же такой строки (столбца) нет, то, используя свойство 2 (см. п. 1) определителя, его можно преобразовать так, чтобы он имел такую строку (столбец).

Пример 2. Очевидно, что

$$|E| = \left| \text{n столбцов} \left\{ \underbrace{\begin{matrix}1&0&0&\dots&0&0\\0&1&0&\dots&0&0\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&0&\dots&0&1\end{matrix}}_{n\ \text{строк}} \right. \right| = 1.$$

Справедлива (см., например, [14]) следующая теорема.

Теорема. *Если A и B — квадратные матрицы одного порядка с определителями $|A|$ и $|B|$, то определитель матрицы $C = AB$ равен произведению определителей перемножаемых матриц, т. е.*

$$|C| = |A|\,|B|.$$

4. Обратная матрица. Рассмотрим теперь так называемую *обратную* матрицу, понятие которой вводится только для квадратной матрицы.

Если A — квадратная матрица, то обратной для нее матрицей называется матрица, обозначаемая A^{-1} и удовлетворяющая условиям

$$AA^{-1} = E,\ A^{-1}A = E,$$

где E — единичная матрица.

Примечание. Из этого определения следует, что если матрица A^{-1} является обратной для A, то и A будет обратной для A^{-1}.

Определение. Если определитель $|A|$ матрицы (5), обозначенной A (см. п. 3), равен нулю, то матрица A называется *вырожденной;* в противном случае матрица A называется *невырожденной.*

Теорема. *Матрица*

$$\begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \dots & \frac{A_{n1}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \dots & \frac{A_{n2}}{|A|} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{|A|} & \frac{A_{2n}}{|A|} & \dots & \frac{A_{nn}}{|A|} \end{pmatrix}, \qquad (6)$$

где A_{ik} — алгебраическое дополнение элемента a_{ik} невырожденной матрицы A, является обратной для A.

Доказательство ради краткости проведем для случая $n = 2$. Умножая матрицу A на матрицу (6), получаем с использованием известных свойств

$$\begin{pmatrix} a_{11}\frac{A_{11}}{|A|}+a_{12}\frac{A_{12}}{|A|} & a_{11}\frac{A_{21}}{|A|}+a_{12}\frac{A_{22}}{|A|} \\ a_{21}\frac{A_{11}}{|A|}+a_{22}\frac{A_{12}}{|A|} & a_{21}\frac{A_{21}}{|A|}+a_{22}\frac{A_{22}}{|A|} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{|A|}{|A|} & \frac{0}{|A|} \\ \frac{0}{|A|} & \frac{|A|}{|A|} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E .$$

Аналогично проводится доказательство и для того случая, когда матрица (6) является первым множителем, а A — вторым.

Из только что установленной теоремы следует, что для того чтобы построить обратную матрицу для квадратной невырожденной матрицы A, надо сначала построить транспонированную матрицу A', а затем каждый элемент A' заменить его алгебраическим дополнением, деленным на $|A|$.

Пример. Найти матрицу, обратную матрице

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Определитель этой матрицы

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -9 .$$

Так как $|A| \neq 0$, то матрица A невырожденная, и, следовательно, существует обратная ей матрица.

Вычисляем алгебраические дополнения:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 .$$

Аналогично $A_{12} = -6$, $A_{13} = 3$, $A_{21} = -4$, $A_{22} = 2$, $A_{23} = -1$, $A_{31} = 2$, $A_{32} = -1$, $A_{33} = -4$.

Составим матрицу

$$C = \begin{pmatrix} -\frac{3}{9} & \frac{6}{9} & -\frac{3}{9} \\ \frac{4}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}.$$

Сделав в этой матрице ее строки столбцами с тем же номером, получим матрицу

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{4}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}.$$

§ 3.3. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

1. Матричная запись и матричное решение системы уравнений первой степени. Покажем, каким образом можно использовать матричный аппарат для решения систем линейных уравнений.

Пусть дана система из n линейных уравнений с n неизвестными x_1, x_2, ..., x_n:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \qquad (1)$$

Числа a_{ik} называются *коэффициентами системы* (1), а числа b_1, b_2, …, b_n — *свободными членами.* Система линейных уравнений (1) называется *однородной,* если $b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 0$.

Матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

называется *матрицей системы* (1), а ее определитель $|A|$ — *определителем системы* (1).

Решением системы (1) называется совокупность чисел $x_1 = \lambda_1$, $x_2 = \lambda_2$, ..., $x_n = \lambda_n$, которые обращают все уравнения системы в тождества.

Система, имеющая хотя бы одно решение, называется *совместной.* Система, не имеющая решений, называется *несовместной.*

Пусть определитель системы (1) отличен от нуля.

Обозначим матрицу-столбец из неизвестных через X и матрицу-столбец из свободных членов через B:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Согласно правилу умножения матриц, имеем

$$AX = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{pmatrix}.$$

Используя определение равенства матриц, данную систему (1) можно записать следующим образом:

$$AX = B. \tag{2}$$

Равенство (2) называется *матричным уравнением* (здесь в роли неизвестного выступает матрица X). Так как по условию $|A| \neq 0$, то для матрицы A существует обратная матрица A^{-1}. Умножим обе части уравнения (2) слева на A^{-1}:

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B.$$

Используя сочетательный закон умножения матриц (см. § 3.1, п. 5), можно написать

$$(A^{-1}A)X = A^{-1}B.$$

Но так как $A^{-1}A = E$ (см. § 3.2, п. 4) и $EX = X$ (см. § 3.1, п. 5), то получаем решение матричного уравнения в виде

$$X = A^{-1}B. \tag{3}$$

Пример. Решить матричным способом систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 10, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 23, \\ x_2 + 2x_3 = 13. \end{cases}$$

В матричной форме эта система запишется в виде $AX = B$. Здесь

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 10 \\ 23 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

Матрица A^{-1} была найдена ранее (см. § 3.2, п. 4). Теперь, согласно равенству (3), имеем

$$X = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{4}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 23 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Используя определение равенства матриц, получаем $x_1 = 4$, $x_2 = 3$, $x_3 = 5$.

Непосредственной проверкой убеждаемся, что эти значения неизвестных удовлетворяют данной системе.

2. Формулы Крамера. (Крамер Г. (1704—1752) — швейцарский математик.) Решение системы (1) n линейных уравнений с n неизвестными удобно записывать и вычислять с помощью определителей.

Из равенства (3), согласно правилу умножения матриц, имеем

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A|}b_1 + \frac{A_{21}}{|A|}b_2 + \ldots + \frac{A_{n1}}{|A|}b_n \\ \frac{A_{12}}{|A|}b_1 + \frac{A_{22}}{|A|}b_2 + \ldots + \frac{A_{n2}}{|A|}b_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{A_{1n}}{|A|}b_1 + \frac{A_{2n}}{|A|}b_2 + \ldots + \frac{A_{nn}}{|A|}b_n \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$x_i = \frac{1}{|A|}\left(b_1 A_{1i} + b_2 A_{2i} + \ldots + b_n A_{ni}\right),\ i = 1, 2, \ldots, n,$$

или, согласно теореме 1 из § 3.2 (п. 2) (эта теорема остается верной и для определителя n-го порядка; см. § 3.2, п. 3)

$$x_i = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2i-1} & b_2 & a_{2i+1} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix},\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Запишем короче:

$$x_i = \frac{\Delta^{(i)}}{\Delta},\ i = 1, 2, \ldots, n. \tag{4}$$

Здесь Δ — определитель системы (1), а $\Delta^{(i)}$ — определитель, полученный из определителя Δ заменой его i-го столбца столбцом свободных членов.

Из самого способа решения ясно, что система (1) имеет единственное решение.

Пример. Система $\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=2 \end{cases}$ имеет определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

и потому имеет единственное решение, которое можно найти по формулам

$$x = \frac{\Delta^{(1)}}{\Delta},\ y = \frac{\Delta^{(2)}}{\Delta},$$

где

$$\Delta^{(1)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1-2 = -3,$$

$$\Delta^{(2)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2-1 = 1,$$

т. е.

$$x = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2},\ y = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}.$$

3. Линейная однородная система и уравнений с *n* неизвестными. Как уже отмечалось (см. п. 1), система уравнений вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = 0. \end{cases} \tag{5}$$

называется однородной. Она является частным случаем системы (1) при $b_1 = 0$, ..., $b_n = 0$. Ясно, что эта система имеет нулевое решение $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, ..., $x_n = 0$. Это решение называют *тривиальным* решением однородной системы. Но может случиться, что однородная система (5) имеет и ненулевое решение. Его называют *нетривиальным* решением однородной системы (5).

Теорема 1. *Если определитель* Δ *однородной системы* (5) *не равен нулю* ($\Delta \neq 0$), *то эта система имеет только тривиальное решение.*

В самом деле, в силу свойства определителей (см. § 3.2, п. 1, свойство 5) все определители $\Delta^{(i)} = 0$, поэтому в силу равенств (4) $x_i = 0$ ($i = 1,\ldots, n$).

Теорема 2. *Если система уравнений* (5) *имеет нетривиальное решение, то ее определитель* Δ *равен нулю* ($\Delta = 0$).

В самом деле, если бы $\Delta \neq 0$, то по теореме 1 система (5) имела бы только одно тривиальное решение.

Справедливо (см., например [14]) и обратное.

Теорема 3. *Если определитель* Δ *системы (5) равен нулю, то эта система имеет нетривиальное решение.*

Упражнения

1. Найдите сумму матриц:

а) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Найдите матрицу: а) $A + 2B$; б) $3A - B$, если
$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

3. Вычислите произведения матриц AB, если:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Вычислите определители 4—12:

4. $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$.

5. $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & -10 \end{vmatrix}$.

6. $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$.

7. $\begin{vmatrix} 105 & 55 \\ 245 & 154 \end{vmatrix}$.

8. $\begin{vmatrix} 12 & 6 & -4 \\ 6 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 8 \end{vmatrix}$.

9. $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 5 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & -5 \end{vmatrix}.$

10. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$

11. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 5 & -6 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & -4 & 5 & -3 \end{vmatrix}.$

12. $\begin{vmatrix} 1 & b & 1 \\ 0 & b & 0 \\ b & 0 & -b \end{vmatrix}.$

13. Найдите матрицы, обратные данным:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

14. Решите матричным способом систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 5. \end{cases}$$

15. Решите уравнения по правилу Крамера:

а) $\begin{cases} 2x + 3y = 1, \\ 3x + 5y = 4. \end{cases}$; б) $\begin{cases} 3x + 4y = 11, \\ 5y + 6z = 28, \\ x + 2z = 7. \end{cases}$

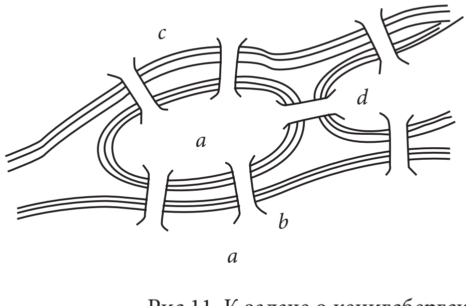
ГЛАВА 4.
КОНЕЧНЫЕ ГРАФЫ

§ 4.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

1. Понятие графа. Многие задачи сводятся к рассмотрению совокупности объектов, существенные свойства которых описываются связями между ними. Например, глядя на карту автомобильных дорог, можно интересоваться только тем, имеется ли связь между некоторыми населенными пунктами, отвлекаясь от конфигурации и качества дорог, расстояний и других подробностей. При изучении электрических цепей на первый план может выступать характер соединений различных ее компонентов — резисторов, конденсаторов, источников и т. п.

В подобных случаях удобно рассматриваемые объекты изображать точками, называемыми *вершинами,* а связи между ними — линиями (произвольной конфигурации), называемыми *ребрами.* Множество вершин V, связи между которыми определены множеством ребер E, называют *графом* и обозначают $G = (V, E)$.

Первая работа по графам была опубликована Леонардом Эйлером в 1736 г. Она содержала решение задачи о кенигсбергских мостах (рис. 11, *а*): можно ли совершить прогулку таким образом, чтобы, выйдя из любого места города, вернуться в него, пройдя в точности один раз по каждому мосту? Ясно, что по условию задачи не имеет значения, как проходит путь по частям суши *a, b, c, d,* на которых расположен г. Кенигсберг (ныне Калининград), поэтому их можно представить вершинами. А так как связи между этими частями осуществляются только через семь мостов,



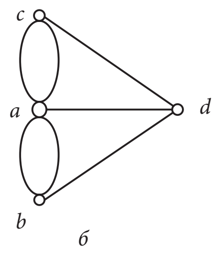


Рис 11. К задаче о кенигсбергских мостах:
а — план города; *б* – граф

то каждый из них изображается ребром, соединяющим соответствующие вершины. В результате получаем граф, изображенный на рис. 11, *б.* Эйлер дал отрицательный ответ на поставленный вопрос. Более того, он доказал, что подобный маршрут имеется только для такого графа, каждая из вершин которого связана с четным числом ребер.

2. Ориентированные графы. Часто связи между объектами характеризуются вполне определенной ориентацией. Например, на некоторых улицах допускается только одностороннее автомобильное движение, в соединительных проводах электрической цепи задаются положительные направления токов.

Для указания направления связи между вершинами графа соответствующее ребро отмечается стрелкой. Ориентированное таким образом ребро называют *дугой,* а граф с ориентированными ребрами — ориентированным графом или короче *орграфом* (рис. 12, *а*).

Если пара вершин соединяется двумя или большим числом дуг, то такие дуги называют *параллельными.* При этом две дуги, одинаково направленные по отношению к данной вершине, называют *строго параллельными,* а различно направленные — *нестрого параллельными.*

Граф, в котором ориентированы только некоторые ребра, называется *смешанным* (рис. 12, б).

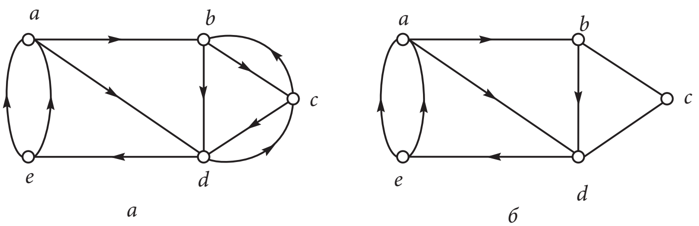


Рис. 12 Ориентированный (а) и смешанный (б) графы

Изменив направления всех дуг орграфа на противоположные, получаем орграф, *обратный* исходному. Если направления дуг орграфа не учитываются и каждая дуга рассматривается как неориентированное ребро, то он называется *соотнесенным* (неориентированным) графом.

3. Типы конечных графов. Если множество вершин графа конечно, то он называется *конечным графом.* В математике рассматриваются и бесконечные графы, но мы заниматься ими не будем, так как в практических приложениях они встречаются редко. Конечный граф $G = (V, E)$, содержащий p вершин и q ребер, называется *(p, q)-графом.*

Пусть $V = \{\upsilon_1, \upsilon_2, ..., \upsilon_p\}$ и $E = \{e_1, e_2, ..., e_q\}$ — соответственно множества вершин и ребер (p, q)-графа. Каждое ребро $e_k \in E$ соединяет пару вершин υ_i, $\upsilon_j \in V$, являющихся его *концами (граничными вершинами).* Для ориентированного ребра (дуги) различают *начальную вершину,* из которой дуга исходит, и *конечную вершину,* в которую дуга заходит. Ребро, граничными вершинами которого является одна и та же вершина, называется *петлей.* Ребра с одинаковыми граничными вершинами являются параллельными и называются *кратными.* В общем случае граф может содержать и *изолированные вершины,* которые не являются концами ребер и не связаны ни между собой, ни с другими вершинами. Например, для (5, 6)-графа на рис. 13, *а,* $V=\{\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3, \upsilon_4, \upsilon_5\}$; $E=\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$; ребра e_2 и e_3 параллельны, ребро e_6 является петлей, а υ_4 — изолированная вершина.

Граф без петель и кратных ребер называют *простым* или *обыкновенным.* Граф без петель, но с кратными ребрами называют *мультиграфом.* Наиболее общий случай графа, когда допускаются петли и кратные ребра, называют *псевдографом.* Так, граф на рис. 13, *б* — это мультиграф, а на рис. 13, *а* — псевдограф. Если граф не имеет ребер ($E = \varnothing$), то все его вершины изолированы ($V \neq \varnothing$), и он называется *пустым* или *нуль-графом.* Простой граф, в котором любые две вершины соединены ребром, называется *полным* (на рис. 13, *б* приведен пример полного графа с шестью вершинами).

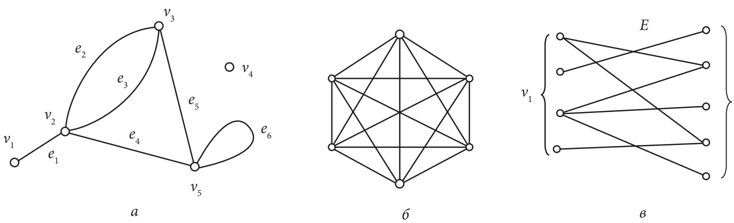
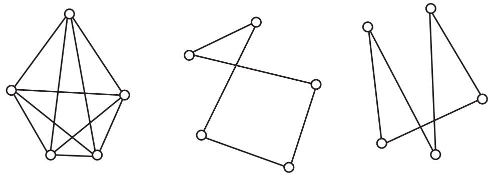


Рис. 13 Типы графов:
а — псевдограф; *б* — полный граф (шестиугольник); *в* — двудольный граф (биграф)

Если множество вершин V простого графа допускает такое разбиение на два непересекающихся подмножества V_1 и V_2 ($V_1 \cap V_2 = \varnothing$), что не существует ребер, соединяющих вершины одного и того же подмножества, то он называется *двудольным* или *биграфом* (рис. 13, *в*). Ориентированный граф считается *простым,* если он не имеет строго параллельных дуг и петель.

Дополнением графа G называется граф $\overline{G}$ с теми же вершинами, что и граф G, и содержащий только те ребра, которые нужно добавить к графу G, чтобы получился полный граф.

На рис. 14 изображены следующие графы: G_1 — полный граф с пятью вершинами; G_2 — некоторый граф, имеющий пять вершин; $\overline{G}_2$ — дополнение графа G_2.



G_1 G_2 $\overline{G}_2$

Рис. 14

4. Смежность, инцидентность, степени. Две вершины υ_i и $\upsilon_j \in V$ графа $G = (V, E)$ называются *смежными,* если они являются граничными вершинами ребра $e_k \in E$. Отношение смежности на множестве вершин графа можно определить, представив каждое ребро как пару смежных вершин, т. е. $e_k = (\upsilon_i, \upsilon_j)$, $k = 1, 2, ..., q$. Для неориентированных графов такие пары неупорядочены, так что $e_k = (\upsilon_i, \upsilon_j) = (\upsilon_j, \upsilon_i)$, а для орграфов — упорядочены, причем υ_i и υ_j означают соответственно начальную и конечную вершины дуги e_k. Петля при вершине υ_i в обоих случаях представляется неупорядоченной парой (υ_i, υ_i). Ясно, что множество вершин V вместе с определенным на нем отношением смежности полностью определяет граф.

Если вершина υ_i является концом (началом или концом) ребра (дуги) e_k, то говорят, что они *инцидентны*: вершина υ_i инцидента ребру (дуге) e_k и ребро (дуга) e_k инцидентно (а) вершине υ_i.

В то время как смежность представляет собой отношение между однородными объектами (вершинами), инцидентность — это отношение между разнородными объектами (вершинами и ребрами). При рассмотрении орграфов различают *положительную инцидентность* (дуга исходит из вершины) и *отрицательную инцидентность* (дуга заходит в вершину).

Число ребер, инцидентных вершине υ_i (петля учитывается дважды), называют *степенью вершины* и обозначают через $\delta(\upsilon_i)$ или $\deg(\upsilon_i)$. Так, для графа на рис. 13 *а*, $\delta(\upsilon_1) = 1$, $\delta(\upsilon_2) = 4$, $\delta(\upsilon_5) = 4$ и т. д. Очевидно, степень изолированной вершины равна нулю ($\delta(\upsilon_4) = 0$). Вершина степени единицы называется *концевой,* или *висячей, вершиной* ($\delta(\upsilon_1) = 1$). Ребро, инцидентное концевой вершине, называется концевым.

Теорема 1. *Для любого псевдографа сумма степеней всех его вершин — число четное, равное удвоенному числу ребер графа.*

Доказательство. Заключение этой теоремы следует из того, что каждое ребро имеет два конца, а каждая петля учитывается два раза.

Следствие. *В любом конечном графе число вершин нечетной степени четно.*

Действительно, если бы число вершин нечетной степени было нечетным, то сумма степеней всех вершин графа равнялась бы нечетному числу (как сумма нечетного числа нечетных чисел), что противоречит теореме.

В орграфе различают положительные $\delta^+(\upsilon_i)$ и отрицательные $\delta^-(\upsilon_i)$ степени вершин, которые равны соответственно числу исходящих из υ_i и заходящих в υ_i дуг. Например, для вершины d орграфа (см. рис. 12, *a*) имеем $\delta^+(d) = 2$ и $\delta^-(d) = 3$.

З а м е ч а н и е. В случае ориентированного псевдографа вклад каждой петли, инцидентной некоторой вершине υ, равен 1, как в $\delta^+(\upsilon)$, так и в $\delta^-(\upsilon)$.

Т е о р е м а 2. *Суммы положительных и отрицательных степеней всех вершин орграфа равны между собой и равны также числу всех дуг.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Учитывая замечание и то, что каждое ребро ориентированного графа имеет одно начало и один конец, из теоремы 1 получаем заключение теоремы 2.

5. Матрицы графов. Граф может быть задан разными способами: рисунком, перечислением вершин и ребер (или дуг) и т. д. Одним из самых удобных способов является задание графа с помощью матрицы. Так, граф можно представить *матрицей смежности*. Строки и столбцы этой матрицы соответствуют вершинам графа, а ее (ij)-элемент равен числу кратных ребер, связывающих вершины υ_i и υ_j (или направленных от вершины υ_i к вершине υ_j для орграфа). Например, для графов, приведенных на рис. 12, *a* и 13, *a*, имеем соответственно следующие матрицы смежности:

$$V_1 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|l}
\multicolumn{1}{c}{a} & \multicolumn{1}{c}{b} & \multicolumn{1}{c}{c} & \multicolumn{1}{c}{d} & \multicolumn{1}{c}{e} & \\ \hline
 & 1 & & 1 & & a \\ \hline
 & & 1 & 1 & & b \\ \hline
 & 1 & & 1 & & c \\ \hline
 & & 1 & & 1 & d \\ \hline
2 & & & & & e \\ \hline
\end{array}
\qquad
V_2 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|l}
\multicolumn{1}{c}{\upsilon_1} & \multicolumn{1}{c}{\upsilon_2} & \multicolumn{1}{c}{\upsilon_3} & \multicolumn{1}{c}{\upsilon_4} & \multicolumn{1}{c}{\upsilon_5} & \\ \hline
 & 1 & & & & \upsilon_1 \\ \hline
1 & & 2 & & 1 & \upsilon_2 \\ \hline
 & 2 & & & 1 & \upsilon_3 \\ \hline
 & & & & & \upsilon_4 \\ \hline
 & 1 & 1 & & 1 & \upsilon_5 \\ \hline
\end{array}$$

Матрица смежности неориентированного графа всегда симметрична, а орграфа — в общем случае несимметрична. Неориентированным ребрам соответствуют пары ненулевых элементов, симметричных относительно главной диагонали матрицы, дугам — ненулевые элементы матрицы, а петлям — ненулевые элементы главной диагонали. В столбцах и строках, соответствующих изолированным вершинам, все элементы равны нулю. Элементы матрицы простого графа равны 0 или 1, причем все элементы главной диагонали нулевые.

Рассматривая инцидентность вершин и ребер (p, q)-графа, можно представить его *матрицей инцидентности* размера $p{\times}q$, строки которой соответствуют вершинам, а столбцы — ребрам. Для неориентированного графа элементы этой матрицы определяются по следующему правилу: ij-элемент равен 1, если вершина υ_i инцидентна ребру e_j, и равен нулю, если υ_i и e_j не инцидентны. В случае орграфа: –1, если υ_i — начальная вершина дуги e_j, 1, если υ_i — конечная вершина дуги e_j, 0, если вершина υ_i и дуга e_j не инцидентны; если вершина υ_i является для дуги e_j началом и концом (т.е. e_j — петля), проставляется любое число, отличное от –1, 1, 0, например 2.

Например, матрица инцидентности графа, приведенного на рис. 13, *a,* имеет вид

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\
A = & \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}
\hline
1 & & & & & \\ \hline
1 & 1 & 1 & 1 & & \\ \hline
 & 1 & 1 & & 1 & \\ \hline
 & & & & & \\ \hline
 & & & 1 & 1 & 2 \\ \hline
\end{array}
\begin{array}{c} \upsilon_1 \\ \upsilon_2 \\ \upsilon_3 \\ \upsilon_4 \\ \upsilon_5 \end{array}
\end{array}
$$

Каждый столбец матрицы инцидентности содержит обязательно два единичных элемента (для орграфа эти элементы всегда имеют различные знаки и равны соответственно 1 и –1). Количество единиц в строке равно степени соответствующей вершины (для орграфа количество положительных единиц определяет положительную степень, а количество отрицательных единиц — отрицательную степень). Нулевая строка соответствует изолированной вершине, а столбец с единственным ненулевым элементом, отличным от –1 и 1, — петле.

6. Изоморфизм. На рис. 15 изображены два графа, которые с геометрической точки зрения совершенно различны (пересечение ребер, если оно не отмечено точкой, не является вершиной). Но по существу они различаются лишь начертанием, а отношения инцидентности (при соответствующем обозначении вершин и ребер) для них одинаковы. Графы, для которых сохраняется отношение инцидентности, называются *изоморфными.*

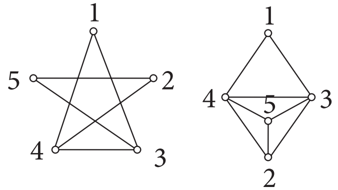


Рис 15

Если существенные свойства графа не связаны со способом его изображения на плоскости или нумерацией вершин и ребер, то изоморфные графы, как правило, не различают между собой.

7. Планарность. Граф называют *плоским (планарным),* если существует изоморфный ему граф (геометрическая реализация), который может быть изображен на плоскости без пересечения ребер. Например, хотя в одном из графов на рис. 15 ребра пересекаются, изоморфный ему не имеет пересечений, следовательно, первый граф плоский.

На рис. 16 показаны два неплоских графа, играющие фундаментальную роль в теории планарности и называемые *графами Понтрягина — Куратовского.* Полный пятиугольник (рис. 16, *а*) представляет собой простой неплоский граф с минимальным числом вершин (полный граф с четырьмя вершинами — плоский, а удаление из пятиугольника хотя бы одного ребра также превращает его в плоский граф). Двудольный граф (рис. 16, *б*) является моделью известной задачи о трех домах и трех колодцах: можно ли проложить от домов к каждому колодцу дороги так, чтобы они не пересекались (враждующие соседи должны иметь возможность пользоваться всеми колодцами, но не хотят встречаться на дорогах)?

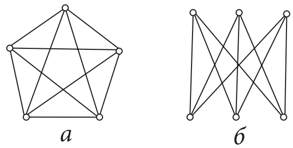


Рис 16 Графы Понтрягина-Куратовского:
а — полный пятиугольник;
б — двудольный граф

Плоские графы обладают многими интересными свойствами. Так, Эйлер обнаружил простую связь между количеством вершин *В,* количеством ребер *Р* и количеством частей *Г,* на которые граф разделяет плоскость (называемых гранями)

$$B - P + \Gamma = 2. \tag{1}$$

Планарность является существенным свойством графов, которые моделируют коммуникации и связи между объектами на плоскости (дороги между населенными пунктами, водопроводные и газопроводные сети, линии передач электроэнергии, межсоединения на печатных платах электронных устройств и кристаллах интегральных схем). Плоскими графами представляются различные карты, с которыми, в частности, связана известная *проблема четырех красок*: всегда ли можно раскрасить области, на которые плоский граф делит поверхность так, чтобы никакие две смежные области не были окрашены в одинаковый цвет и чтобы при этом было использовано не более четырех цветов? Более ста лет эта проблема оставалась нерешенной. Наконец, в 1976 г. американские математики Кеннет Аппель и Вольфганг Хакен решили эту задачу с помощью компьютера.

8. Части графа. Граф $G' = (V', E')$ является *частью графа* $G = (V, E)$, если $V' \subset V$ и $E' \subset E$. Часть, которая, наряду с некоторым подмножеством ребер графа, содержит и все инцидентные им вершины, называется *подграфом.*

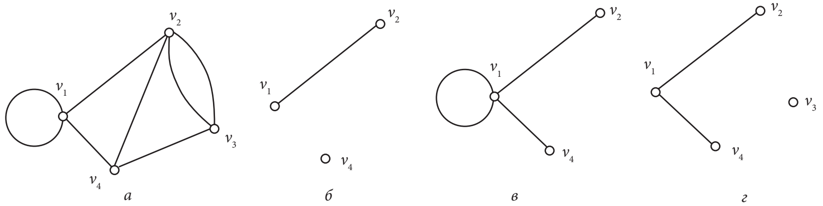


Рис 17 Граф и его части:
а — граф; *б* — часть графа; *в* — подграф; *г* — суграф

Часть, которая, наряду с некоторым подмножеством ребер графа, содержит все вершины графа ($V' = V$, $E' \subset E$), называется *суграфом.* Рассмотренные графы показаны на рис. 17.

Исходный граф по отношению к его подграфу называют *надграфом,* а по отношению к суграфу — *сверхграфом.* Совокупность всех ребер графа, не принадлежащих его подграфу (вместе с инцидентными вершинами), образует *дополнение подграфа.* Говорят, что подграфы $G' = (V', E')$ и $G'' = (V'', E'')$ *разделены ребрами,* если они не имеют общих ребер ($E' \cap E'' = \varnothing$), и *разделены вершинами,* если у них нет общих вершин ($V' \cap V'' = \varnothing$).

§4.2. МАРШРУТЫ, ЦЕПИ, ЦИКЛЫ И ПУТИ

1. Определения. Пусть G — неориентированный граф.

Маршрутом в G называется такая последовательность ребер (e_1, e_2, ..., e_n), в которой каждые два соседних ребра e_{i-1} и e_i, ($i = 2, 3, ..., n$) имеют общую инцидентную вершину. В маршруте одно и то же ребро может встречаться несколько раз.

Вершина υ_0, инцидентная ребру e_1 и не инцидентная e_2, называется началом маршрута. Если же ребра e_1 и e_2 — кратные, требуется дополнительное указание, какую из двух инцидентных им вершин считать *началом маршрута.* Аналогично определяется конец маршрута.

Примерами маршрутов на графе рис. 13, *а* могут служить последовательности (e_1, e_3, e_2, e_3, e_5), (e_5, e_6, e_4, e_4). Первый маршрут проходит через последовательность вершин (υ_1, υ_2, υ_3, υ_2, υ_3, υ_5) и соединяет вершины υ_1 и υ_5, а второй — через последовательность вершин (υ_3, υ_5, υ_5, υ_2, υ_5) и соединяет вершины υ_3 и υ_5. *Замкнутый маршрут* приводит в ту же вершину, из которой он начался.

Маршрут, все ребра которого различны, называется *цепью,* а маршрут, для которого различны все вершины, называется *простой цепью.* Замкнутая цепь называется *циклом,* а простая цепь — *простым циклом.* Так, на графе рис. 13, *а* (e_2, e_5, e_6) — цепь, (e_1, e_2, e_5) — простая цепь, (e_2, e_3, e_4, e_5) — цикл, (e_2, e_4, e_5) — простой цикл.

Ориентированные маршруты на орграфе определяются аналогично с той разницей, что начальная вершина каждой последующей дуги маршрута должна совпадать с конечной вершиной предыдущей дуги. Иначе говоря, движение по маршруту допускается только в направлениях, указанных стрелками. Маршрут, не содержащий повторяющихся дуг, называется *путем,* а не содержащий повторяющихся вершин — *простым путем.* Замкнутый путь называется *контуром,* а простой замкнутый путь — *простым контуром.* Граф (орграф) называется *циклическим (контурным),* если он содержит хотя бы один цикл (контур), в противном случае он называется *ациклическим (бесконтурным).*

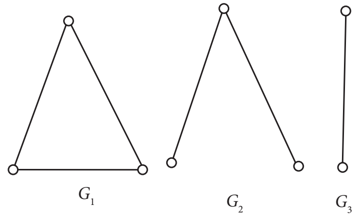


Рис 18

Понятия цепи и цикла применимы и к ориентированным графам. При этом направления дуг не учитываются, т. е. по существу вместо орграфа рассматривают неориентированный соотнесенный ему граф.

Число ребер маршрута (пути) называется его *длиной.*

2. Связность. Две вершины графа называют *связанными,* если существует маршрут, соединяющий эти вершины. Граф, любая пара вершин которого связана, называют *связным графом.* В противном случае граф называется *несвязным.*

Если граф несвязный, то множество его вершин можно единственным образом разделить на непересекающиеся подмножества, каждое из которых содержит все связанные между собой вершины и вместе с инцидентными им ребрами образует связный подграф, называемый *компонентой графа.* Любой несвязный граф является совокупностью связных графов. На рис. 18 изображен несвязный граф с компонентами G_1, G_2 и G_3.

3. Расстояния. *Расстоянием* $d(\upsilon', \upsilon'')$ между вершинами υ' и υ'' неориентированного связного графа G называется минимальная длина простой цепи с началом υ' и концом υ''. Заметим, что $d(\upsilon', \upsilon'') = d(\upsilon'', \upsilon')$.

Центром графа G называется вершина, от которой максимальное из расстояний до других вершин являлось бы минимальным.

Максимальное расстояние от центра графа G до его вершин называется *радиусом графа* (обозначение $r(G)$).

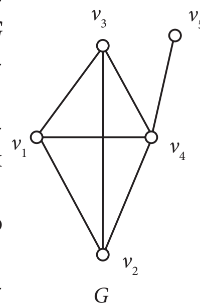


Рис 19

Для графа G на рис. 19 расстояния между вершинами: $d(\upsilon_1, \upsilon_5) = 2$, $d(\upsilon_1, \upsilon_4) = 1$, $d(\upsilon_1, \upsilon_3) = 1$, $d(\upsilon_1, \upsilon_2) = 1$, $d(\upsilon_2, \upsilon_5) = 2$, $d(\upsilon_2, \upsilon_4) = 1$, $d(\upsilon_2, \upsilon_3) = 1$, $d(\upsilon_3, \upsilon_5) = 2$, $d(\upsilon_3, \upsilon_4) = 1$, $d(\upsilon_4, \upsilon_5) = 1$, $d(\upsilon_1, \upsilon_1) = 0$ и т. д.

Отсюда следует, что вершина υ_4 — центр данного графа, а его радиус $r(G) = 1$.

4. Эйлеровы циклы и цепи. *Эйлеров цикл* — цикл графа, содержащий все ребра графа. *Эйлеров граф* — граф, имеющий эйлеров цикл (эйлеров цикл можно считать следом пера, вычерчивающего этот граф, не отрываясь от бумаги). На рис. 20. изображен граф, обладающий эйлеровым циклом (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}), следовательно, этот граф эйлеров.

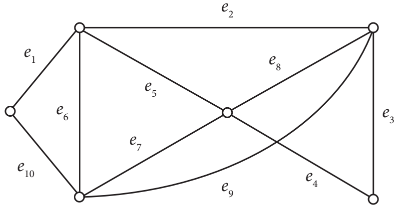


Рис 20

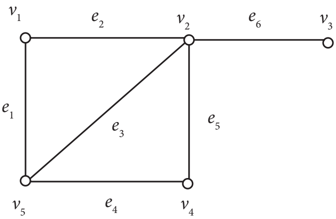


Рис 21

Теорема Эйлера. *Для того чтобы неориентированный граф G был эйлеровым, необходимо и достаточно, чтобы он был связным и степени всех его вершин были четными.*

В графе задачи о кенигсбергских мостах (§ 4.1, п. 1, рис. 11, б) все вершины имеют нечетную степень. Следовательно, согласно теореме Эйлера, решение этой задачи невозможно.

Эйлерова цепь — цепь, включающая все ребра данного неориентированного графа G, но имеющая различные начало υ' и конец υ''. Для того чтобы в неориентированном графе G существовала эйлерова цепь, необходимо и достаточно, чтобы он был связным и степени всех его вершин, кроме начальной υ' и конечной υ'', были четными (υ' и υ'' должны иметь нечетную степень). На рис. 21 изображен граф, обладающий эйлеровой цепью (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6) с началом в вершине υ_5 и концом в вершине υ_3.

§ 4.3. ДЕРЕВЬЯ И ЛЕС

Неориентированный граф называется *неориентированным деревом* (или просто *деревом*), если он является связным и не содержит циклов, а значит, петель и кратных ребер. Дерево на множестве p вершин всегда содержит $q = p - 1$ ребер, т.е. минимальное количество ребер, необходимое для того, чтобы граф был связным. Действительно, две вершины связываются одним ребром, и для связи каждой последующей вершины с предыдущими требуется ребро, следовательно, для связи p вершин необходимо и достаточно $p - 1$ ребер.

При добавлении в дерево ребра образуется цикл, а при удалении хотя бы одного ребра дерево распадается на компоненты, каждая из которой представляет собой также дерево или изолированную вершину. Несвязный неориентированный граф, компоненты которого являются деревьями, называется *лесом* (лес из k деревьев, содержащий p вершин, имеет в точности $p - k$ ребер). Сказанное иллюстрируется на примере дерева (рис. 22, *а*), которое превращается в циклический граф добавлением ребра (рис. 22, *б*) и распадается на лес из двух деревьев T_1 и T_2 при удалении ребра *e* (рис. 22, *в*).

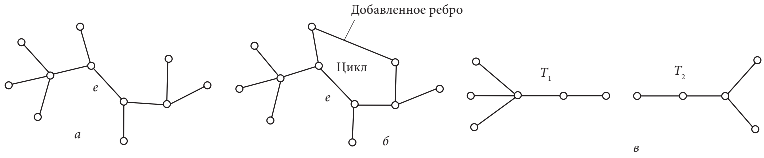


Рис 22

В дереве между любыми двумя вершинами существует цепь и притом только одна. Верно и обратное: если любые две вершины графа связаны единственной цепью, то граф является деревом. Если конечное дерево состоит более чем из одной вершины, то имеет хотя бы две концевые вершины и хотя бы одно концевое ребро.

Обычно деревья считаются существенно различными, если они не изоморфны. На рис. 23 показаны все возможные различные деревья с шестью вершинами. С увеличением числа вершин количество различных деревьев резко возрастает (например, при $p = 20$ их насчитывается около миллиона). Среди различных деревьев выделяются два важных частных случая: *последовательное дерево,* представляющее собой простую цепь, и *звездное дерево,* в котором одна из вершин (центр) смежна со всеми остальными вершинами.

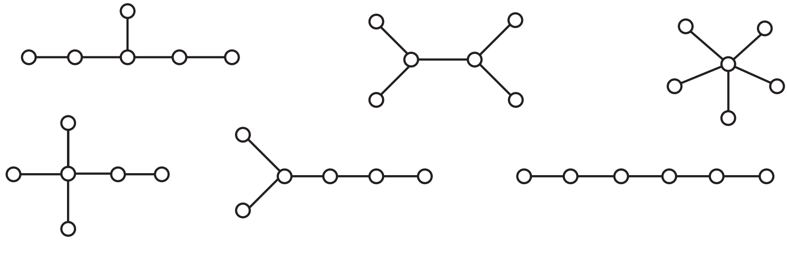


Рис 23

Рассматриваются также деревья и с ориентированными ребрами (дугами). Ориентированное дерево называется *прадеревом* с *корнем* υ_0, если существует путь между вершиной υ_0 и любой другой его вершиной (рис. 24). Ясно, что прадерево имеет единственный корень.

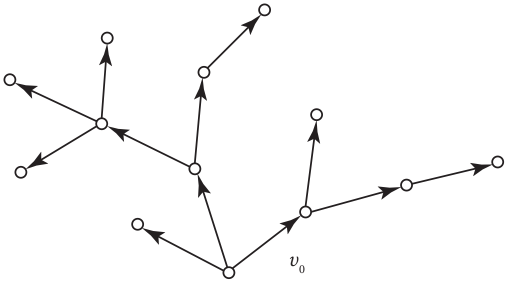
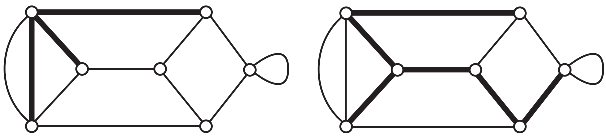


Рис 24 Прадерево с корнем υ_0

Деревом некоторого графа G (рис. 25, *а*) называется его связный подграф без циклов. Если такое дерево является суграфом (содержит все вершины графа), то оно называется *покрывающим деревом,* или *остовом* (рис. 25, *б*). Так как петля представляет собой простейший цикл, состоящий из единственного ребра, то она не может входить в состав любого дерева графа.



а *б*

Рис 25

Ребра графа, которые принадлежат его дереву, называют *ветвями.* Если дерево покрывает граф, то множество ребер графа разбивается на два подмножества: подмножество ветвей и подмножество ребер *дополнения дерева,* называемых *хордами.* При этом связный (p, q)-граф содержит $\upsilon = p - 1$ ветвей и $\sigma = q - p + 1$ хорд. Если граф несвязный, то совокупность остовов k его компонент образует *покрывающий лес.* В этом случае $\upsilon = p - k$ и $\sigma = q - p + k$.

Пусть дано конечное дерево G. Вершинами типа 1 называют его концевые вершины. Если из дерева G удалить все вершины типа 1 и инцидентные им концевые ребра, то в оставшемся дереве G' концевые вершины называют вершинами типа 2 в дереве G. Аналогично определяются вершины типов 3, 4 и т. д. Конечное дерево имеет вершины лишь конечного числа типов, причем число вершин максимального типа равно единице или двум. На графе, изображенном на рис. 26, типы его вершин отмечены цифрами. Как видно, этот граф содержит две вершины максимального (4-го) типа.

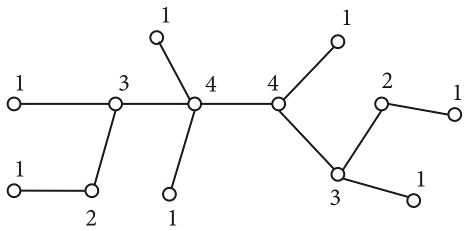


Рис 26

Цикломатическим числом конечного неориентированного графа G называется

$$\upsilon(G) = \upsilon_c + \upsilon_e + \upsilon_\upsilon,$$

где υ_c — число связных компонент графа; υ_e — число его ребер; υ_υ — число его вершин. Цикломатическое число любого конечного графа неотрицательно.

Цикломатическое число любого дерева $\upsilon(G) = \upsilon_c + \upsilon_e - \upsilon_\upsilon = 0$. Действительно, число вершин υ_υ в дереве на единицу больше числа ребер υ_e, т.е. $\upsilon_e - \upsilon_\upsilon = -1$, а число связных компонент для дерева $\upsilon_c = 1$. Отсюда $\upsilon(G) = 0$.

Цикломатическое число леса равно сумме цикломатических чисел своих связных компонент-деревьев, т.е. также равно нулю.

Деревья играют важную роль в различных прикладных задачах, когда, например, речь идет о связи каких-либо объектов минимальным числом каналов (линий связи, дорог, коммуникаций) с определенными свойствами. С помощью дерева определяется система координат при моделировании цепей и систем различной физической природы. Деревья используются в качестве моделей при рассмотрении иерархических систем объектов, структурных формул органических соединений и т. п.

Упражнения

1. Сравните графы, изображенные на рис. 27.

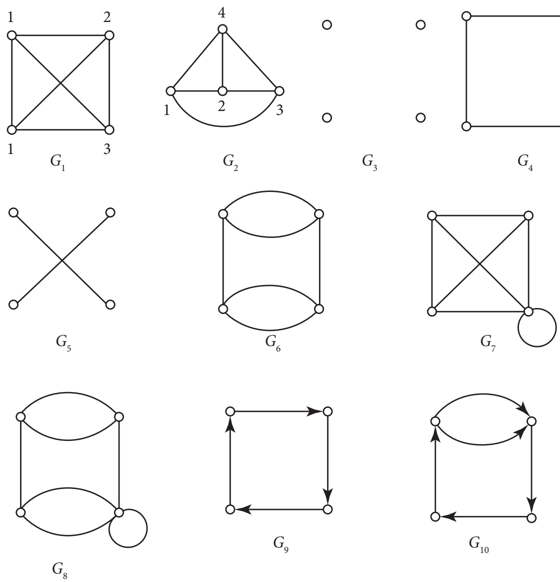


Рис 27

2. Чему равны степени вершин графов G_1 и G_2, изображенных на рис. 28?

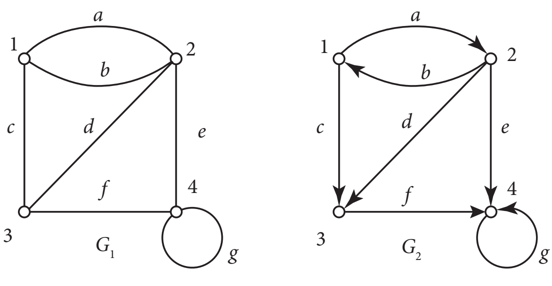


Рис 28

3. Задайте матрицами смежности графы G_1 и G_2 (см. рис. 28)

4. Задайте матрицами инцидентности графы G_1 и G_2 (см. рис. 28)

5. Задайте списком ребер граф G_2 (см. рис.28.)

6. Определите, изоформны ли графы G_1 и G_2, изображенные на рис. 29.

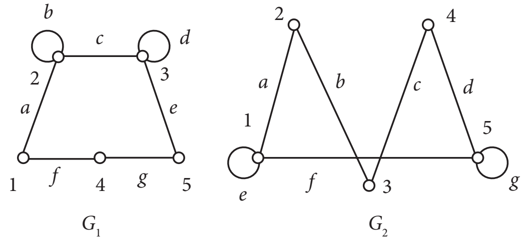


Рис 29

7. Для вершин υ_1 и υ_6 графа G на рис. 30 приведите примеры маршрута, цепи, простой цепи.

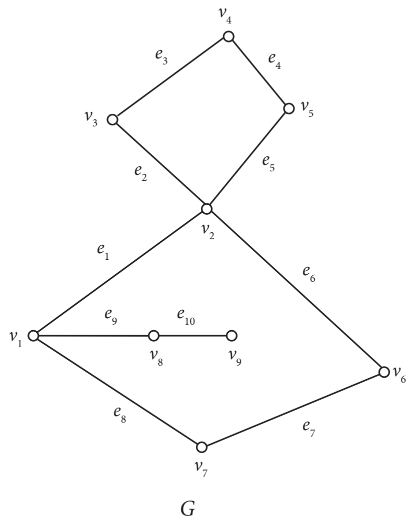


Рис 30

8. Определите в графе G (см. рис. 30) циклический маршрут, цикл, простой цикл, приняв вершину υ_1 за их начало и конец.

9. Для трех графов G_1, G_2, G_3 на рис. 31 определите расстояния между вершинами. Какие вершины являются центрами графов? Чему равны радиусы графов?

10. Имеют ли пятиугольник и четырехугольная пирамида эйлеров цикл?

11. Имеют ли пятиугольник и четырехугольная пирамида эйлерову цепь?

12. Сколько вершин максимального типа имеется в графе, изображенном на рис. 32?

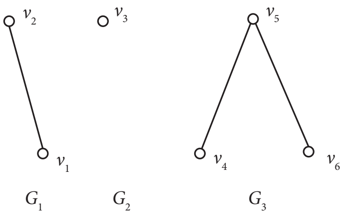


Рис 31

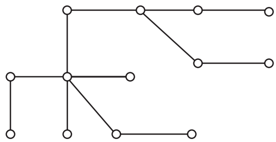


Рис 32

13. Вычислите цикломатические числа для графов, изображенных на рис. 31 и 32

ГЛАВА 5.
ЛОГИКА

В настоящей главе займемся едва ли не простейшими из всех возможных функций. Аргументы этих функций принимают всего два значения 0 и 1. В этом же множестве лежат и значения функций. Иными словами, рассматриваемые функции могут принимать всего два различных значения. Несмотря на такую исходную простоту, исчисление подобных функций оказывается удобным инструментом во многих трудных задачах, в том числе и в задачах биологии.

§ 5.1. БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ

1. Булевы функции одной переменной. Будем, как обычно, обозначать независимую переменную символом x. Если независимых переменных несколько, будем их нумеровать: x_1 x_2, ..., x_n.

Далее будем предполагать, что множество значений x состоит всего из двух элементов. Без ущерба для общности можем считать, что такими элементами являются числа 0 и 1. Таким образом, на числовой оси множества значений аргумента x изображается двумя точками.

Независимая переменная, которая принимает всего два значения, называется *двоичной,* или *логической, переменной,* или *булевой,* по имени Дж. Буля.

Рассмотрим возможные функции от логической переменной $x \in D = \{0, 1\}$. При этом будем интересоваться лишь теми функциями, значения которых лежат также в $D = \{0, 1\}$. Таких функций немного. В самом деле, можно указать, например, степенную функцию: $f(x) = x^n$. Но эта функция в данном случае ничем не отличается от *тождественной* функции $f(x) = x$, так как значение 0 она переводит в 0, а значение 1 в 1.

Другой более интересной функцией является *отрицание.* Эта функция обозначается $\bar{x}$ и читается «*не x*». Она действует следующим образом: если $x = 0$, то $\bar{x} = 1$, и наоборот, если $x = 1$, то $\bar{x} = 0$.

Построим таблицы рассмотренных функций (табл. 1, 2), для чего слева перечислим значения аргумента (0 и I), а справа — соответствующие значения функций. Таблицы такого вида принято называть *таблицами истинности.*

Таблица 1

x	$f(x) = x$
0	0
1	1

Таблица 2

x	$f(x) = \bar{x}$
0	1
1	0

Кроме этих двух функций можно указать еще только две функции, отображающие множество $\{0, 1\}$ в себя. Это постоянные $f(x) \equiv 1$ и $f(x) \equiv 0$ (табл. 3, 4 — таблицы истинности).

Других функций от одной логической переменной, отображающих $\{0, 1\}$ в себя, не существует. В самом деле, любая такая функция определяется двумя значениями ($f(0)$ и $f(1)$), причем каждое из этих значений может быть равно либо 0, либо 1. Таким образом, каждая такая функция — это двухбуквенное слово $f(0)f(1)$, образованное из $\{0, 1\}$, как из алфавита. Число таких слов, а следовательно, и число интересующих нас функций, равно, как мы знаем, $2^2 = 4$. Ровно столько функций и перечислено, а все возможные двухбуквенные слова, которые можно образовать из $\{0, 1\}$, записаны в правых частях таблиц 1—4

Таблица 3

x	$f(x) \equiv 1$
0	1
1	1

Таблица 4

x	$f(x) = 0$
0	0
1	0

Итак, если x — логическая переменная, то существует только четыре функции $f(x)$, отображающие область определения $D = \{0, 1\}$ в себя: две постоянные, одна тождественная и одна — отрицание. Эти функции называют *булевыми функциями одного переменного.* Каждую из этих функций можно задать аналитически, т. е. с помощью формул, например $f(x) = \bar{x}$, или таблично.

Заметим еще, что так же, как в непрерывном анализе, одну и ту же функцию можно задать с помощью разных формул. Например, функцию $f(x) \equiv 0$ можно задать и формулой $f(x) \equiv \bar{1}$.

Имея всего четыре функции, трудно построить исчисление, столь же содержательное, как анализ непрерывных функций. Перейдем поэтому к изучению функций, зависящих от нескольких логических переменных, значения которых лежат в $D = \{0, 1\}$. Такие функции называют *булевыми функциями нескольких переменных.* В этом случае также получим конечное множество функций, но запас их достаточно велик, чтобы построить содержательный математический аппарат.

Ограничимся случаем двух переменных.

2. Булевы функции двух переменных. Пусть x_1 и x_2 — логические переменные. Рассмотрим функцию от x_1 и x_2:

$$f(x_1, x_2) \tag{1}$$

Так как каждая из переменных x_1 x_2 может принимать только два значения: 0 и 1, то областью определения функции (1) являются четыре слова: 00, 01, 10 и 11. Приняв эти слова за координаты точек на плоскости x_1Ox_2, получим четыре вершины единичного квадрата (рис. 33). Таким образом, функцию (1) можно считать заданной на множестве вершин единичного квадрата, и это множество она отображает во множество {0, 1}. Например, функция $f(x_1, x_2)$ может быть равна единице во всех вершинах, кроме начала координат, а в начале координат обращаться в нуль.

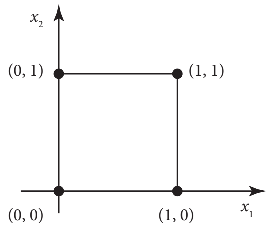


Рис 33

Легко найти общее число всевозможных функций $f(x_1, x_2)$ со значениями в {0, 1}. В самом деле, перенумеруем вершины единичного квадрата в каком-нибудь порядке. В каждой вершине функция $f(x_1, x_2)$ может принимать одно из двух значений: 0 или 1. Задать функцию — значит указать, в каких вершинах она принимает значение 0 и в каких 1. Таким образом, наша функция — это четырехбуквенное слово, образованное из алфавита {0, 1}. Число таких слов равно $2^4 = 16$. Следовательно, *можно построить только 16 различных функций двух логических переменных со значениями в* {0, 1}. Перечислим эти функции.

Прежде всего отметим две простейшие функции — постоянные: $f(x_1, x_2) \equiv 0$ и $f(x_1, x_2) \equiv 1$ (табл. 5, 6 — таблицы истинности. То же название и для следующих ниже таблиц 7—20).

Таблица 5

x_1	x_2	$f(x_1, x_2) \equiv 0$
0	0	0
1	0	0
0	1	0
1	1	0

Таблица 6

x_1	x_2	$f(x_1, x_2) \equiv 1$
0	0	1
1	0	1
0	1	1
1	1	1

Еще две тоже очень простые функции: $f(x_1, x_2) = x_1$ и $f(x_1, x_2) = x_2$ (табл. 7, 8). Аналогично строятся функции $f(x_1, x_2) = \bar{x}_1$ и $f(x_1, x_2) = \bar{x}_2$ (табл. 9, 10).

Таблица 7

x_1	x_2	$f(x_1, x_2) = x_1$
0	0	0
1	0	1
0	1	0
1	1	1

Таблица 8

x_1	x_2	$f(x_1, x_2) = x_2$
0	0	0
1	0	0
0	1	1
1	1	1

Все эти функции уже встречались при рассмотрении функций одной логической переменной. Перейдем теперь к более интересным функциям двух логических переменных.

Таблица 9

x_1	x_2	$f(x_1, x_2) = \bar{x}_1$
0	0	1
1	0	0
0	1	1
1	1	0

Таблица 10

x_1	x_2	$f(x_1, x_2) = \bar{x}_2$
0	0	1
1	0	1
0	1	0
1	1	0

Дизъюнкция. Так называется функция $f(x_1, x_2)$, которая принимает значение 0 тогда и только тогда, когда оба аргумента равны 0 (табл. 11). Дизъюнкция обозначается $x_1 \vee x_2$ и читается «x_1 или x_2». Легко видеть, что дизъюнкцию можно определить равенством $x_1 \vee x_2 = \max(x_1, x_2)$. Таким образом, чтобы дизъюнкция была равна единице, достаточно (и необходимо), чтобы хоть один из аргументов был равен единице.

Таблица 11

x_1	x_2	$x_1 \vee x_2$
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	1

Таблица 12

x_1	x_2	$x_1 \wedge x_2$
0	0	0
1	0	0
0	1	0
1	1	1

Конъюнкция. Так называется функция $f(x_1, x_2)$, которая принимает значение, равное единице, тогда и только тогда, когда оба аргумента равны 1 (табл. 12). Конъюнкция обозначается $x_1 \wedge x_2$ или $x_1 \cdot x_2$, читается «x_1 и x_2»[1]. Легко видеть, что конъюнкцию можно определить также равенством $x_1 \wedge x_2 = \min(x_1, x_2)$. Таким образом, чтобы конъюнкция была равна нулю, необходимо (и достаточно), чтобы хоть один аргумент был равен нулю.

Импликация. Эта функция принимает значение 0 тогда и только тогда, когда первый аргумент x_1 равен 1, а второй x_2 равен 0 (табл. 13). Обозначается $x_1 \to x_2$, читается «если x_1, то x_2», или «из x_1 следует x_2».

Эквиваленция, Эта функция принимает значение, равное 1, тогда и только тогда, когда оба аргумента принимают одинаковое значение (табл. 14). Обозначается $x_1 \sim x_2$, читается «x_1 эквивалентно x_2», или «x_1 равнозначно x_2».

Функция Шеффера, или штрих Шеффера. Эта функция обращается в нуль тогда и только тогда, когда оба аргумента равны единице (табл. 15). Обозначается x_1/x_2.

Таблица 13

x_1	x_2	$x_1 \to x_2$
0	0	1
1	0	0
0	1	1
1	1	1

Таблица 14

x_1	x_1	$x_1 \sim x_2$
0	0	1
1	0	0
0	1	0
1	1	1

Функция Даггера, или стрелка Пирса. Эта функция обращается в единицу тогда и только тогда, когда оба аргумента равны нулю (табл. 16). Обозначается $x_1 \downarrow x_2$.

Таблица 15

x_1	x_2	x_1/x_2
0	0	1
1	0	1
0	1	1
1	1	0

Таблица 16

x_1	x_2	$x_1 \downarrow x_2$
0	0	1
1	0	0
0	1	0
1	1	0

[1] Иногда конъюнкцию обозначают знаком &. До сих пор не установилось единое обозначение и для других функций. Так, например, для отрицания существуют еще два знака.

Исключенное «или». Так называют функцию, которая обращается в единицу, когда либо первый, либо второй аргумент обращается в 1, но не оба вместе. Обозначается x_1C

Таблица 17

x_1	x_2	x_1C
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	0

Таблица 18

x_1	x_2	$x_1 \leftarrow x_2$
0	0	0
1	0	1
0	1	0
1	1	0

Нам осталось рассмотреть еще три функции. Первая функция из этой тройки обозначается $x_1 \leftarrow x_2$ и иногда называется *запретом* (табл. 18). Она характерна тем, что принимает значение 1 тогда и только тогда, когда первый аргумент x_1 равен 1, а второй x_2 равен 0. Две другие функции — это запрет и импликация, в которых первым аргументом считается x_2, а вторым x_1 (табл. 19, 20).

Таблица 19

x_1	x_2	$x_2 \leftarrow x_1$
0	0	0
1	0	0
0	1	1
1	1	0

Таблица 20

x_1	x_2	$x_2 \rightarrow x_1$
0	0	1
1	0	1
0	1	0
1	1	1

Итак, перечислены все 16 различных функций двух логических переменных со значениями в {0, 1}. Каждая функция задана своей таблицей. В левых частях таблиц записаны в одном и том же порядке 4 вершины единичного квадрата, а в правых — все возможные слова длины 4, образованные из {0, 1}.

Кроме того, каждая из 16 функций двух логических переменных имеет свое обозначение. Пользуясь этими обозначениями, можно задавать функции аналитически, с помощью формул. Например,

$$f(x_1, x_2) = x_2 \rightarrow x_1,\ f(x_1, x_2) = x_2 \text{ и т. п.}$$

Знаки ~, ∇, $\wedge$ и др. называют *связками*.

На практике неудобно пользоваться полным набором из 16 связок, но в этом нет и необходимости, так как одни связки можно заменить суперпозицией других. В самом деле, наши функции принимают только два значения: 0 и 1. Поэтому они сами могут служить аргументами связок.

Так, например, если $y_1 = f_1(x_1, x_2)$ и $y_2 = f_2(x_1, x_2)$, то можно образовать $y_1 \wedge y_2$ или $y_2 \leftarrow y_1$ и вообще $F(y_1, y_2)$, где F — одна из 16 связок двух логических переменных. Это же можно записать и в развернутом виде: $f_1\ (x_1, x_2) \wedge f_2(x_1, x_2)$ или $f_2\ (x_1, x_2) \leftarrow f_1\ (x_1, x_2)$ и вообще $F(f_1(x_1, x_2), f_2\ (x_1, x_2))$. Выражение $F(f_1(x_1, x_2), f_2\ (x_1, x_2))$ по своей сути есть функция от x_1 и x_2. Каждому набору значений этих аргументов она ставит в соответствие 0 или 1. По способу получения это — суперпозиция функций или сложная функция. Имея две таких функции, и их можно связать какой-нибудь из 16 связок, образуя еще более сложную суперпозицию, например

$$[f_1(x_1, x_2) \wedge f_2(x_1, x_2)] \sim [f_3(x_1, x_2) \leftarrow f_4(x_1, x_2)]$$

и т. п.

Заметим теперь, что сколь бы ни были сложны эти суперпозиции, они задают функции двух логических переменных со значениями в $\{0, 1\}$. А таких функций, как известно, всего 16. Следовательно, любая суперпозиция булевых функций двух переменных задает одну из 16 функций этих переменных. Составляя такую суперпозицию, получаем просто иное аналитическое выражение какой-нибудь из 16 функций.

Предположим теперь, что имеем некоторую сложную функцию. Как узнать, какую из 16 функций двух логических переменных она задает? Для этого можно составить таблицу сложной функции и сравнить эту таблицу с таблицами связок. Покажем на примерах, как составляются таблицы сложных функций.

Рассмотрим функцию

$$f(x_1, x_2) = \bar{x}_1 \wedge x_2 \tag{2}$$

Составим таблицу истинности так, чтобы слева, как обычно, были два столбика значений аргументов, а справа — столько столбцов, сколько связок указано в функции f (табл. 21).

Таблица 21

x_1	x_2	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_1 \wedge x_2$
0	0	1	0
1	0	0	0
0	1	1	1
1	1	0	0
№ шага		1	2

На первом шаге узнаем значения $\bar{x}_1$ по табл. 11. На втором шаге из полученного аргумента $\bar{x}_1$ и аргумента x_2 образуем конъюнкцию по табл. 12. В итоге получаем таблицу значений нашей функции, из которой следует, что в третьей вершине квадрата (в вершине (0, 1)) функция равна единице, а во всех остальных — нулю.

Рассмотрим еще пример:

$$f(x_1, x_2) = (\bar{x}_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_2). \quad (3)$$

Составим таблицу истинности этой функции (табл. 22). На первых двух шагах найдем $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$. Затем, пользуясь таблицей дизъюнкции, найдем $\bar{x}_1 \vee x_2$ и $x_1 \vee \bar{x}_2$. Наконец, на пятом шаге найдем конъюнкцию от полученных аргументов $y_1 = (\bar{x}_1 \vee x_2)$ и $y_2 = (x_1 \vee \bar{x}_2)$. В итоговом пятом столбце получим значение нашей функции $f(x_1, x_2)$.

Таблица 22

x_1	x_2	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_1 \vee x_2$	$x_1 \vee \bar{x}_2$	$(\bar{x}_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_2)$
0	0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	0
0	1	1	0	1	0	0
1	1	0	0	1	1	1
№ шага		1	2	3	4	5

Из приведенных примеров ясен принцип построения таблиц истинности функций, заданных суперпозицией. Эти таблицы строятся последовательно, в порядке следования операций, отделенных друг от друга скобками. Сравнив итоговый столбец построенной таблицы с таблицами связок, найдем ту связку, которую задает рассматриваемая суперпозиция. В частности, сравнив табл. 19 и заключительный (второй) шаг табл. 21, найдем, что

$$\bar{x}_1 \wedge x_2 = x_2 \leftarrow x_1.$$

Аналогично, сравнив табл. 14 и заключительный (пятый) шаг табл. 22, получим

$$(\bar{x}_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_2) = x_1 \sim x_2.$$

Итак, показано, что одни связки можно с помощью операции «функции от функции» выражать через другие. Замечательно, что в суперпозициях при этом можно обойтись не всеми, а только некоторыми связками. В самом деле, рассматривая первый из наших примеров, мы установили, что

$$x_2 \leftarrow x_1 = \bar{x}_1 \wedge x_2. \quad (4)$$

Таким образом, запрет выражается через отрицание и конъюнкцию.

Точно так же, конструируя таблицу во втором примере, установили (см. третий шаг табл. 22), что

$$x_1 \to x_2 = \bar{x}_1 \vee x_2. \tag{5}$$

Это значит, что импликация может быть выражена через отрицание и дизъюнкцию. Наконец, из итогового столбца табл. 22 следует, что

$$x_1 \sim x_2 = (\bar{x}_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_2). \tag{6}$$

Далее из простого сравнения таблиц функций легко получить тождества

$$x_1 / x_2 = \overline{x_1 \wedge x_2} \tag{7}$$

(см. табл. 15 и 12),

$$x_1 \downarrow x_2 = \overline{x_1 \vee x_2} \tag{8}$$

(см. табл. 16 и 11),

$$x_1 \nabla x_2 = \overline{x_1 \sim x_2} \tag{9}$$

(см. табл. 17 и 14).

Заметим еще, что отрицание тождественного нуля есть тождественная единица. Отсюда и из тождеств (4) - (9) следует

Теорема. *Любую из 16 булевых функций двух переменных можно выразить с помощью суперпозиции, используя только тождественный нуль, отрицание, конъюнкцию и дизъюнкцию.*

Указанный набор связок не является минимальным. Можно доказать, что любая из этих 16 функций может быть записана с помощью лишь одного знака Шеффера или только одной стрелки Пирса. Однако при вычислении удобнее пользоваться четырьмя связками, указанными в теореме.

4. Элементарные тождества. Тождественные преобразования. Уже не раз говорилось о том, что одну и ту же булеву функцию можно задавать различными формулами. Например, тождественный нуль можно задать двумя формулами: $f(x) \equiv 0$ и $f(x) \equiv \bar{1}$, Две формулы были получены и для импликации:

$$f(x_1, x_2) = x_1 \to x_2 \text{ и } f(x_1, x_2) = \bar{x}_1 \vee x_2.$$

Если две формулы задают одну и ту же функцию, то равенство этих формул называется *тождеством.* Таким образом, имеем тождества

$$0 = \bar{1},$$

$$x_1 \to x_2 = \bar{x}_1 \vee x_2.$$

Пользуясь подобными тождествами, можно преобразовывать формулы, задающие булевы функции. При этом меняется только аналитическое выражение функции, но не сама функция.

Тождественные преобразования булевых функций базируются на некоторой системе простейших тождеств. Часть из них доказали (см. (4) — (9)), другие так же легко проверить с помощью таблиц. Эти тождества имеют вид:

I. $x_1 \to x_2 = \bar{x}_1 \vee x_2$.

II. $x_1 \sim x_2 = (\bar{x}_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_2)$.

III. $\bar{\bar{x}} = x$.

IV. $x \wedge x = x, x \vee x = x$.

V. $x \wedge \bar{x} = 0, x \vee \bar{x} = 1$.

VI. $x \wedge 1 = x, x \vee 1 = 1$.

VII. $x \wedge 0 = 0, x \vee 0 = x$.

VIII. $\overline{x_1 \wedge x_2} = \bar{x} \vee \bar{x}_2$, $\overline{x_1 \vee x_2} = \bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2$.

IX. $x_1 \wedge x_2 = x_2 \wedge x_1, x_1 \vee x_2 = x_2 \vee x_1$.

§ 5.2. ВЫСКАЗЫВАНИЯ

Назовем *высказыванием* любое предложение, о котором можно сказать, что оно истинно или ложно[1]. Например: 1) «идет дождь»; 2) «открыта дверь»; 3) «2 > 5»; 4) «нейрон возбужден»; 5) «очень жарко». Все это высказывания. Высказывание «2 > 5» ложно. Остальные в зависимости от условий могут быть ложными, а могут быть и истинными.

Вопросительные, восклицательные предложения, а также определения не будем считать высказываниями, о них нельзя сказать истинны они или ложны. Например, фразы «куда ты пошел?», «стойте!», «результат сложения двух чисел называется их суммой» не являются высказываниями.

Будем интересоваться не содержанием высказывания, а только истинно данное высказывание или ложно.

Высказывание, представляющее собой одно утверждение, принято называть, *простым*, или *элементарным*. Примерами простых высказываний могут служить высказывания 1) — 5). В дальнейшем будем простые высказывания обозначать буквами латинского алфавита *x*, *y*, *z*, *υ* и т. д.

Пусть имеются высказывания *x*, *y*, *z*, *υ* и т. д. Эти высказывания можно соединять между собой с помощью союзов *не*, *и*, *или*, *если*..., *то* и т. д.[2] При этом предложения «*x и y*», «*не z*», «*если x*, *то υ*» и т. д. называются *составными высказываниями*. Например, «*не* идет дождь», «идет дождь и 2 < 5», «*если* очень жарко, *то* открыта дверь», «нейрон возбужден *или* очень жарко» — составные высказывания.

[1] Это не определение, а лишь описание термина «высказывание», который относится к разряду первичных понятий. Вместо него часто употребляют термин «предложение».

[2] Частица «не» с точки зрения грамматики не является союзом. Мы будем называть ее так для краткости речи.

Как узнать, истинны составные высказывания или ложны, если известна истинность и ложность исходных простых высказываний? Очевидно, это можно сделать только после того, как определим, какой смысл вложен в соединительные союзы *и, или* и т. д. Этот смысл сформировался в сознании в результате опыта, и в бытовой речи свободно оперируем этими союзами, разъясняя при необходимости дополнительными фразами, что имеем в виду.

Теперь задача состоит в том, чтобы придать каждому союзу вполне определенный строгий смысл. Иными словами, надо условиться о правилах действия союзов. При этом хотелось бы условиться так, чтобы формальные правила не противоречили нашему опыту.

Проще всего дело обстоит с союзом *не*. Очевидно, что если «x» истинно, то «*не* x» ложно, и наоборот. Например, если высказывание «открыта дверь» соответствует действительности и, значит, является истинным, то высказывание «не открыта дверь» является ложным.

Рассмотрим теперь союз *и*. Будем считать, что составное высказывание «x и y» истинно, если x — истинно и y — истинно, а во всех остальных случаях будем считать это высказывание ложным. Такая договоренность хорошо согласуется с обычной практикой. В самом деле, пусть x — это высказывание «крокодил — животное»[1], а y — высказывание «$2 < 5$». Таким образом, простое высказывание x — истинно и простое высказывание y — истинно. Тогда естественно считать, что составное высказывание «крокодил — животное» и «$2 < 5$» также истинно, а высказывание «крокодил — растение» и «$2 \geq 5$» ложно. Менее очевидны промежуточные случаи, когда одно простое высказывание истинно, а другое ложно. В этих случаях высказывания «крокодил — растение» и «$2 < 5$» и «крокодил — животное» и «$2 \geq 5$», по определению, также будем считать ложными.

Перейдем к союзу *или*. В бытовой речи этот союз употребляется в двух смыслах — исключенном и неисключенном. Например, высказывание «в поездке будут использованы поезда или самолеты» можно трактовать двояко: 1) «в поездке будут использованы или поезда, или самолеты, или и то и другое»; 2) «в поездке будет использован только один какой-нибудь вид транспорта — поезда или самолеты». Какой смысл вкладывается в высказывание с союзом *или* обычно ясно из контекста.

Чтобы не пользоваться контекстом и определенно знать, что имеется в виду, будем различать эти два случая употребления союза *или* и говорить, что в первом случае употреблено неисключенное *или*, а во втором — исключенное *или*. Условимся, далее, считать, что составное высказывание «x или y», где «или» — не исключенное, истинно тогда, когда либо x — истинно, либо y — истинно, либо истинны и x, и y, и ложно, когда ложны и x, и y.

[1] В более развернутом виде это высказывание можно сформулировать так: «крокодил принадлежит множеству животных».

Условимся также считать, что составное высказывание «x или y», где *или* исключенное, истинно тогда, когда либо x — истинно, а y — ложно, либо когда x — ложно, а y — истинно; в остальных случаях, т. е. когда и x, и y истинны, или и x, и y ложны, это высказывание будем считать ложным.

Эта договоренность также хорошо согласуется с практикой. В самом деле, пусть x — высказывание «28 июля спутник пролетает над Африкой», y — высказывание «28 июля спутник пролетает над Америкой». Тогда очевидно, что составное высказывание «28 июля спутник пролетает над Африкой или над Америкой», где *или* — неисключенное, истинно и в том случае, когда хотя бы одно из высказываний (x или y) истинно, и в том случае, когда оба они истинны. Ложным составное высказывание будет только тогда, когда и x, и y ложны.

Предположим теперь, что программа полета спутника задана более жестко: «28 июля спутник пролетает только над одним каким-нибудь континентом: Африкой или Америкой». Ясно, что здесь союз *или* употреблен в исключенном смысле, и это составное утверждение окажется ложным, если вдруг выяснится, что спутник пролетел и над Африкой, и над Америкой, т. е. оказались истинными оба простых высказывания и x, и y.

Рассмотрим еще союз *если..., то.* С его помощью образуются составные высказывания «если x, то y». Здесь простое высказывание x называют посылкой (или условием), а высказывание y — заключением. Будем считать высказывание «если x, то y» ложным только в том случае, когда x истинно, а y ложно. Это также не противоречит обычной практике употребления этого союза.

В самом деле, если составное высказывание утверждает, что из истинной посылки вытекает истинное заключение, то такое составное высказывание естественно считать истинным. Если же составное высказывание утверждает, что из истинной посылки вытекает ложное заключение, то такое составное высказывание естественно считать ложным.

Что же касается тех случаев, когда посылка ложна, то известно, что, исходя из ложной посылки, можно получить и ложное, и истинное заключение. В самом деле, возьмем в качестве посылки высказывание «3 = 2». Это ложное высказывание. Пользуясь сложением, из него можно получить другое ложное высказывание, например, если 3 = 2, то 3 + 1 = 2 + 1, т. е. 4 = 3. Таким образом, если уж согласились с тем, что 3 = 2 (взяли это равенство в качестве посылки), то придется согласиться и с тем, что 4 = 3. Естественно поэтому составное высказывание «*если* 3 = 2, *то* 4 = 3» считать истинным.

Из этой же посылки «3 = 2» можно получить и истинное заключение. Так, например, складывая 3 = 2 и 2 = 3, получим 5 = 5. Это даем нам право и высказывание «*если* 3 = 2, *то* 5 = 5» считать истинным. Поэтому впредь, каким бы ни было заключение в составном высказывании *если..., то* с ложной посылкой, будем считать это составное высказывание истинным.

Итак, строго определены правила действия союзов *не, и, или* исключенное, *или* неисключенное, *если..., то*. Пользуясь этими правилами, легко можем выяснить, ложно или истинно то или иное составное высказывание. В самом деле, если истинное высказывание обозначить буквой И, а ложное буквой Л, то из описанных правил следует, например, что два истинных высказывания, соединенных союзом «и», есть истинное высказывание. Символически

И *и* **И** = **И**.

Аналогично **И** *и* **Л** = **Л**; **И** *или* **Л** = **И**; *не* **И** = **Л**; *не* **Л** = **И**; *если* **И**, *то* **Л** = **Л**; *если* **И**, *то* **И** = **И** и т.д.

Бросается в глаза полная аналогия между действием рассмотренных союзов и свойствами связок двух логических переменных. Союзу *и* соответствует конъюнкция, союзу *или* в неисключенном смысле — дизъюнкция, союзу *если..., то* — импликация, союзу *не* — отрицание, исключенному *или* соответствует функция, которая так и называется.

Аналогично можно было бы рассмотреть союз *тогда* и *только тогда, когда* ... и соответствующую ему функцию — эквиваленцию, а также и другие союзы.

Все это означает, что с высказываниями и союзами можно обращаться точно так же, как с логическими переменными и функциями от них. Иными словами, имеем исчисление высказываний вполне аналогичное исчислению логических переменных. Разница лишь в том, что вместо чисел 0 и 1 пишем буквы И и Л, а вместо символов $\wedge$, $\vee$, $-$, $\rightarrow$ и т. д. слова *и, или, не, если..., то* и т. д. Это разница не существенная, однако писать числа 0, 1 и символы связок удобнее, чем буквы и слова. Поэтому впредь каждому высказыванию будем приписывать значение 1, если оно истинно, и значение 0, если ложно. Будем, таким образом, рассматривать высказывание как логическую переменную. И будем соединять высказывания символическими союзами $\wedge$, $\vee$, $-$, $\rightarrow$ и т.д., образуя составные высказывания.

Тогда таблицы истинности, например, для высказываний $\bar{x}$, $x \wedge y$, $x \vee y$, $x \nabla y$ и $x \rightarrow y$ будут иметь соответственно следующий вид (табл. 23—27).

Таблица 23

x	$\bar{x}$
0	1
1	0

Таблица 24

x	y	$x \wedge y$
0	0	0
1	0	0
0	1	0
1	1	1

Таблица 25

x	y	$x \vee y$
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	1

Таблица 26

x	y	$x \nabla y$
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	0

Таблица 27

x	y	$x \to y$
0	0	1
1	0	0
0	1	1
1	1	1

Из всего сказанного следует, что имеем хорошо изученный содержательный математический аппарат — аппарат алгебры логики,— с помощью которого можно изучать сколь угодно сложные составные высказывания. Если составное высказывание содержит несколько простых высказываний, то можем найти множество логических возможностей данного высказывания, т. е. все возможные наборы значений простых высказываний. Можем найти также множество истинности составного высказывания, т. е. такие наборы значений простых высказываний, при которых составное высказывание истинно.

Далее, пользуясь алгеброй логики или, что то же самое, исчислением высказываний, можем сложные громоздкие высказывания преобразовать в простые, из одних высказываний получать другие (последнее равносильно доказательству теорем), выяснять, из каких элементарных эффектов (простых высказываний типа «включен — выключен», «закрыт — открыт», «возбужден — заторможен», «да — нет») может произойти тоили иное сложное явление (составное высказывание).

Важно то, что язык высказываний — это не только язык сугубо математических выводов. Это язык любого научного исследования, в основе которого лежит логический вывод. Пользуясь алгеброй высказываний, можно формулировать и решать задачи в различных, подчас далеких от математики областях, таких, например, как геология, криминалистика, медицина. Заметим еще, что язык высказываний в своей основе чрезвычайно прост. Операции его осуществляются автоматически, и их можно поручить машине.

Упражнения

1. Покажите, что булева функция $f(x_1, x_2) = \bar{x}_2 \to \bar{x}_1$ имеет ту же таблицу истинности, что и импликация $x_1 \to x_2$.

2. Составьте таблицы истинности булевых функций:
а) $f(x_1, x_2) = (x_1 \wedge \bar{x}_2) \to \bar{x}_1$;
б) $f(x_1, x_2) = (x_1 \wedge \bar{x}_2) \to x_2$;
в) $f(x_1, x_2) = (x_1 \to x_2) \wedge \bar{x}_2$;
г) $f(x_1, x_2) = \overline{\bar{x}_1 \vee \bar{\bar{x}}_2}$.

3. Проверьте, не составляя таблиц истинности, являются ли следующие булевы функции постоянными:
а) $\overline{x \wedge \bar{x}}$;
б) $\bar{x} \sim \bar{x}$;
в) $\overline{x \sim \bar{x}}$;
г) $(x \vee x) \sim (x \wedge x)$.

4. Докажите тождества:
а) $(x \to x) \to x = x$;
б) $(x_1 \wedge x_2) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_2) = x_1$
в) $\overline{x_1 \to x_2} = x_1 \wedge \bar{x}_2$;
г) $x_1 \wedge x_2 = \overline{\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2}$.
5. Упростите формулы для булевых функций из задания 2.

6. Упростите формулы:
а) $(x_1 \wedge x_2) \to x_1$;
б) $(x_1 \wedge x_2) \vee ((x_1 \wedge \bar{x}_2) \vee (\bar{x}_1 \wedge x_2))$.

7. Среди следующих предложений выделите высказывания и установите, истинны или ложны:
1) Москва — столица России;
2) А. С. Пушкин — великий русский поэт;
3) Волга впадает в Черное море;
4) студент биологического факультета педагогического университета;
5) $25 < 10$;
6) $x^2 - 5x + 6$;
7) пейте виноградный сок!;
8) который час?

8. Среди следующих высказываний указать простые и составные. В составных высказываниях выделите грамматические связки:

1) число 36 не делится на 7;
2) число 18 делится на 6 и на 3;
3) если число 162 делится на 9, то оно делится на 3;
4) число 7 является делителем числа 63;
5) я пойду в театр или встречу друга;
6) Земля вращается вокруг Солнца.

9. Сформулируйте отрицание следующих высказываний:

1) число 35 не делится на число 7;
2) $6 > 3$;
3) $4 \leq 7$;
4) кислород — газ.

10. Обозначьте простые высказывания буквами и запишите следующие высказывания с помощью символов алгебры логики:

1) сегодня понедельник или вторник;
2) идет дождь или снег;
3) если идет дождь, то крыши мокрые,

11. Пусть x и y обозначают высказывания:
x — «я учусь в школе»;
y — «я люблю биологию».

Прочтите следующие составные высказывания:

1) $\bar{x}$; 2) $\bar{y}$; 3) $x \wedge y$; 4) $x \wedge \bar{y}$; 5) $\bar{x} \wedge y$; 6) $\bar{x} \wedge \bar{y}$; 7) $\overline{x \wedge y}$.

12. Какие из следующих высказываний истинны?

1) Если $3 \times 3 = 9$, то $3 < 8$;
2) если $3 \times 3 = 9$, то $3 > 8$;
3) если $3 \times 3 = 5$, то $3 < 8$;
4) если $3 \times 3 = 5$, то $3 > 8$

13. Пусть x — высказывание «студент Петров изучает немецкий язык»; y — высказывание «студент Петров успевает по дискретной математике». Дайте словесную формулировку высказываний:

1) $\bar{x} \wedge y$; 2) $x \rightarrow y$; 3) $\bar{y} \sim \bar{x}$.

14. Составьте таблицу истинности для высказывания $\bar{x} \vee y$.

Составьте таблицы истинности для функций:

15. $f(x, y) = \bar{x} \vee \bar{y}$.

16. $f(x, y) = (x \wedge \bar{y}) \to (\bar{x} \vee y)$.

Докажите тождества:

17. $(x \wedge \bar{x}) \vee y = y$; $\overline{x \to y} = x \wedge \bar{y}$.

18. Упростите формулу $(\overline{x \vee y} \to \bar{x} \vee y) \wedge y$.

ГЛАВА 6. РАЗНОСТНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 6.1. ПОНЯТИЕ О РАЗНОСТНОМ УРАВНЕНИИ

В настоящей главе (§§ 6.1—6.3) рассмотрим некоторые математические понятия, с помощью которых можно описать динамику биологических систем. Как изменяется одна биологическая переменная в результате изменений другой? Могут быть интересны изменения во времени, которые происходят с численностью популяции конкретного вида в определенной среде. Биологическая переменная может быть функцией таких переменных, как температура, влажность или обилие пищи. К подобным задачам применимы математические методы, рассматриваемые в этой главе. Ради определенности биологической переменной в большинстве случаев будет служить численность некоторого вида в данной среде как функция времени.

Можно построить как дискретные, так и непрерывные модели процессов, зависящих от времени. В дискретной модели время представляет собой дискретную переменную и наблюдения выполняются лишь через определенные фиксированные интервалы времени. Перепись популяции может проводиться, например, ежечасно, ежегодно или каждые 10 лет. В непрерывной модели время представляет собой непрерывную переменную и численность популяции считается непрерывно изменяющейся во времени. В этой главе рассмотрим понятия, относящиеся к дискретным моделям.

В дискретных моделях популяционного роста величина x_n будет обозначать численность популяции к концу n-го периода времени. По окончании одного периода времени численность равна x_1; по окончании двух периодов она равна x_2 и т. д. Развитие популяции во времени описывается последовательностью чисел $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots$.

П р и м е р 1. Допустим, что популяция растет согласно формуле $x_n = 1000 + 500(1 - 2^{-n})$. Если $n = 0$, то начальная численность $x_0 = 1000 + 500(1 - 2^0) = 1000$. При $n = 1$ численность популяции $x_1 = 1000 + 500(1 - 2^{-1}) = 1000 + 250 = 1250$. После двух временных интервалов численность равна $x_2 = 1000 + 500(1 - 2^{-2}) = 1375$. Так как при больших n величина 2^{-n} становится очень малой, то член $1 - 2^{-n}$ приближается к 1, когда n возрастает. Это означает, что с ростом n численность x_n приближается к *предельному,* или *равновесному,* значению 1500. Прирост популяции за n-й период времени выражается величиной

$$x_n - x_{n-1} = [1000 + 500(1 - 2^{-n})] - [1000 + 500(1 - 2^{n-1})] = 500 \cdot 2^{-n}.$$

Эта величина с ростом n приближается к нулю.

В примере 1 дана формула для x_n, и поэтому численность популяции к концу каждого периода времени известна. Однако чаще бывает известна лишь начальная численность и имеется некоторая информация о скоростях роста популяции в различные периоды времени. Тогда задача состоит в том, чтобы, используя эту информацию, определить явную формулу для x_n. Можем, например, иметь оценку для прироста популяции $x_n - x_{n-1}$ за n-й. период. Достаточно ли этой информации, чтобы определить x_n? Эти идеи приводят к следующему определению.

Определение. *Разностным уравнением называется уравнение, которое связывает между собой значения x_n при различных значениях индекса n. Если N_1 и N_2 представляют собой наибольший и наименьший из индексов n, встречающихся в записи уравнения, то порядок разностного уравнения есть $N_1 - N_2$.*

Пример 2. Ниже приведены примеры разностных уравнений.

1) $x_n - x_{n-1} = 2^{-n}$. Здесь $N_1 = n$, а $N_2 = n - 1$. Порядок уравнения равен $N_1 - N_2 = n - (n - 1) = 1$. Это разностное уравнение первого порядка;

2) $x_{n+1} = 2^{-n} x_n + (x_{n-1})^2$. Это уравнение второго порядка, так как $N_1 = n+1$, $N_2 = n - 1$ и $N_1 - N_2 = 2$;

3) $2x_{n+2} + 3x_{n+1} = \sin(x_{n+1})$ — уравнение первого порядка;

4) $2x_{n+2} + 3x_{n+1} + x_n = 0$ — уравнение второго порядка;

5) $(x_{n+3})^2 + x_n = 5$ — уравнение третьего порядка.

Пример 3. Популяция насекомых увеличивается таким образом, что прирост за n-й период времени вдвое больше прироста за предыдущий период времени. Требуется описать этот процесс роста с помощью разностного уравнения. Каков порядок этого уравнения?

Определим x_n как численность популяции после n периодов времени. Прирост за n-й период выражается величиной $x_n - x_{n-1}$, а прирост за $(n - 1)$-й период — величиной $x_{n-1} - x_{n-2}$. По условию, $x_n - x_{n-1} = 2(x_{n-1} - x_{n-2})$. Это разностное уравнение второго порядка, которое можно записать также в виде $x_n - 3x_{n-1} + 2x_{n-2} = 0$.

Пример 4. Крупный рогатый скот выкармливается с целью максимизировать живую массу к моменту убоя. При определенных условиях масса средней коровы за каждую неделю возрастает на 5%. Требуется описать это увеличение массы с помощью разностного уравнения. Каков порядок этого уравнения?

Определим w_n как массу средней коровы после n недель. После $n + 1$ недель величина w_n увеличивается на 5%. Отсюда получаем уравнение $w_{n+1} = 1{,}05w_n$. Это разностное уравнение первого порядка.

В §§ 6.2, 6.3 будут изложены методы решения для нескольких важных типов разностных (а в §§ 6.4, 6.5 дифференциальных) уравнений. Если дано разностное уравнение, то можно ли найти явную формулу для x_n? В том случае, когда такая формула будет найдена, она называется *решением* разностного уравнения.

§ 6.2. ЛИНЕЙНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Первое из разностных уравнений, которые рассмотрим, можно представить себе как простую модель роста популяции. Рассмотрим популяцию, растущую таким образом, что с увеличением ее численности скорость роста популяции тоже увеличивается. Точнее говоря, допустим, что скорость роста популяции в любой период времени пропорциональна размеру популяции в начале этого периода.

Чтобы выразить это допущение в математической форме, обозначим через x_n размер популяции в конце n-го периода времени. Тогда величина $x_{n+1} - x_n$ выражает прирост популяции за следующий период времени, т. е. это скорость роста, или рост в единицу времени на $(n + 1)$-м интервале времени. Эта величина пропорциональна x_n. Если коэффициент пропорциональности обозначить через a, то получим $x_{n+1} - x_n = ax_n$. Сгруппировав члены, приходим к разностному уравнению первого порядка

$$x_{n+1} = (1 + a)x_n. \tag{1}$$

Чтобы решить это уравнение, надо знать начальный размер популяции x_0. Тогда, используя уравнение (1), можно последовательно вычислить x_1, x_2, x_3 и т.д. Таким образом, имеем

$$x_1 = (1 + a)x_0,$$
$$x_2 = (1 + a)x_1 = (1 + a)\,(1 + a)x_0 = (1 + a)^2x_0,$$
$$x_3 = (1 + a)x_2 = (1 + a)\,(1 + a)^2x_0 = (1 + a)^3x_0.$$

Структура решения должна быть понятна. При переходе к каждому следующему моменту времени размер популяции умножается на множитель $1 + a$. Поэтому общее решение, или общая формула для x_n, имеет вид $x_n = (1 + a)^n x_0$. При известном значении x_0 эта формула определяет x_n.

Если коэффициент пропорциональности a положителен ($a > 0$), то выполняется условие $1 + a > 1$ и, следовательно, $(1 + a)^n$ безгранично возрастает с ростом n. Если $a = 0$, то популяция остается на постоянном уровне x_0. Это случай нулевого роста. Если a отрицателен (но больше, чем – 1), то $0 < 1 + a < 1$ и x_n приближается к нулю при возрастании n. В этом случае популяция в конце концов вымирает. Заметим, что если $a = -1$, то популяция вымирает после первого же периода времени. В этой модели нас не интересуют значения a, меньшие – 1, так как они приводили бы к отрицательным численностям.

Пример 1. Решить разностное уравнение первого порядка $x_{n+1} - x_n = 2x_n$. Чему равно x_3, если $x_0 = 10$?

Уравнение можно записать в виде $x_{n+1} = 3x_n$. Это пример уравнения описанного выше типа при $a = 2$ и $1 + a = 3$. Общее решение имеет вид $x_n = (1 + a)^n\, x_0 = 3^n x_0$. Поскольку $x_0 = 10$, получаем, что $x_n = 3^n\, 10$ и $x_3 = 3^3 \cdot 10 = 270$.

Пример 2. Популяция бактерий первоначально насчитывала 1000 особей и постоянно увеличивалась с темпом роста 50% в каждый час. Какова численность популяции после 10 ч роста?

Пусть x_n соответствует численности популяции после n часов. По условию, $x_{n+1} = 1{,}5x_n$ и $x_0 = 1000$. Значит, $x_1 = 1{,}5 \cdot 1000$, $x_2 = 1{,}5^2 \cdot 1000$ и т. д. Общее решение есть $x_n = 1{,}5^n x_0$. По прошествии 10 ч размер популяции составит $x_{10} = 1{,}5^{10} \cdot 1000 \approx 57700$.

Уравнение $x_{n+1} = (1 + a)x_n$ представляет собой пример *линейного* разностного уравнения первого порядка. Члены уравнения, содержащие x_n и x_{n+1}, имеют вид $a(n)x_n$ и $b(n)x_{n+1}$, где $a(n)$ и $b(n)$ зависят только лишь от n. Таких членов, как $x_n^{\,2}$, x^3_{n+1}, 2^{x_n}, $x_n x_{n+1}$, $1/x_n$ и т.п., в уравнении нет. Если появляются подобные члены, то разностное уравнение называют *нелинейным*.

Пример 3. Следующие разностные уравнения являются линейными:

1) $x_{n+1} = 5x_n - 4x_{n-1}$; 2) $x_{n+1} = n^2 x_n$;
3) $x_{n+2} - x_n = 0$; 4) $x_{n+1} - nx_n = n^2$.

Пример 4. Следующие разностные уравнения являются нелинейными:

1) $x_{n+1} = x_n^{\,2}$ 2) $x_{n+1} - x_n x_{n-1}$;
3) $x_{n+2} = x_{n+1}(1 + x_n)$; 4) $x_{n+1} = \sqrt{x_n}$

Общий вид линейного разностного уравнения первого порядка таков:

$$x_{n+1} = f(n)x_n + g(n), \tag{2}$$

где $f(n)$ и $g(n)$ — заданные функции от n. Если известно x_n, то по уравнению можно определить x_{n+1}. Уравнение (2) называют *однородным* в случае, когда $g(n) = 0$, и *неоднородным* — в противном случае.

Рассмотрим сначала однородное уравнение $x_{n+1} = f(n)x_n$. Решая его, положим $n = 0$ и получим $x_1 = f(0)x_0$. При $n = 1$ находим $x_2 = f(1)x_1 = f(1)f(0)x_0$. Аналогично, при $n = 2$ имеем $x_3 = f(2)f(1)f(0)x_0$. Это подсказывает вид общего решения:

$$x_n = f(n-1)f(n-2)\ldots f(2)f(1)f(0)x_0.$$

Это решение можно проверить подстановкой его в исходное уравнение $x_{n+1} = f(n)x_n$. По формуле для общего решения имеем

$$x_{n+1} = f(n)f(n-1)f(n-2)\ldots f(2)f(1)f(0)x_0 = f(n)x_n.$$

Пример 5. Рассмотрим популяцию бактерий, растущую от начального размера в 1000 особей таким образом, что ее размер по прошествии $n + 1$ часов больше размера после n часов в $(n + 3)/(n + 2)$ раза. Какова численность популяции после 10 ч роста?

Пусть, как и прежде, x_n представляет размер популяции после n часов роста. Известно, что $x_0 = 1000$ и что $x_{n+1} = [(n+3)/(n+2)]x_n$. Это однородное уравнение при $f(n) = (n + 3)/(n + 2)$. Общее решение есть

$$x_n = f(n-1)f(n-2)\dots f(2)f(1)f(0)x_0 = \frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{n+1}{n}\dots\frac{5}{4}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{2}\cdot 1000$$

Сокращая члены, получаем $x_n = [(n + 2)/2] \cdot 1000 = 500(n + 2)$. Размер популяции после 10 ч равен $x_{10} = 500(10 + 2) = 6000$. В этом процессе роста популяция каждый час увеличивается на 500 особей. В конечном счете эта модель окажется нереалистичной, поскольку необходимые для роста ресурсы всегда ограничены. Однако она может служить хорошим описанием некоторых типов роста на ограниченном отрезке времени.

Вернемся теперь к общему линейному разностному уравнению первого порядка. Метод его решения такой же, как и для рассмотренного выше частного случая, хотя вид решения более сложный. Полагая $n = 0$, получаем $x_1 = f(0)x_0 + g(0)$. При $n = 1$ уравнение дает

$$x_2 = f(1)x_1 + g(1) = f(1)f(0)x_0 + f(1)g(0) + g(1).$$

Аналогично,

$$x_3 = f(2)x_2 + g(2) = f(2)f(1)f(0)x_0 + f(2)f(1)g(0) + f(2)g(1) + g(2).$$

Это подсказывает вид общего решения:

$$\begin{aligned} x_n &= f(n-1)f(n-2)\dots f(1)f(0)x_0 + f(n-1)f(n-2)\dots f(1)g(0) + \\ &+ f(n-1)f(n-2)\dots f(2)g(1) + \dots + f(n-1)g(n-2) + g(n-1). \end{aligned} \qquad (3)$$

В том, что это решение, можно убедиться, подставив его в уравнение (2). Формулу (3) запоминать не следует, так как ее, по-видимому, гораздо легче выводить каждый раз, повторяя приведенные выше рассуждения.

Пример 6. Популяция бактерий растет от начального размера в 1000 особей таким образом, что ее прирост в интервале от n до $n + 1$ часов с начала роста составляет $500 \cdot 2^{-n}$. Каков размер популяции после 10 ч роста?

По условию $x_{n+1} = x_n + 500 \cdot 2^{-n}$ и $x_0 = 1000$, где x_n обозначает размер популяции после n часов роста. Здесь $f(n) = 1$, а $g(n) = 500 \cdot 2^{-n}$. Найдем размер популяции через 1 ч после начала роста: $x_1 = x_0 + 500 \cdot 2^{-0} = 1000 + 500 = 1500$; через 2 ч: $x_2 = x_1 + 500 \cdot 2^{-1} = 1500 + 500/2 = 1750$; через 3 ч: $x_3 = x_2 + 500 \cdot 2^{-2} = 1750 + 500/4 = 1875$. Общий вид решения таков:

$$x_n = 1000 + 500 + \frac{500}{2} + \frac{500}{2^2} + \dots + \frac{500}{2^{n-1}} = 1000 + 500\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}.$$

Итак, $x_n = 1000 + 1000\ [1 - (1/2)^n] = 2000 - 1000 \cdot 2^{-n}$. В этих вычислениях воспользовались выражением для суммы n первых членов геометрической прогрессии. После 10 ч роста размер популяции составляет $x_{10} = 2000 - 1000 \cdot 2^{-10} \approx 1999$. С течением времени популяция бактерий приближается к предельному, или равновесному, размеру, равному 2000. В терминах модели роста он интерпретируется как размер популяции, который может поддерживаться за счет имеющихся ресурсов.

§ 6.3. ЛИНЕЙНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Общий вид линейного разностного уравнения второго порядка таков:

$$a(n)x_{n+2} + b(n)x_{n+1} + c(n)\, x_n = d(n), \qquad (1)$$

где $a(n)$, $b(n)$, $c(n)$ и $d(n)$ — заданные функции. Если $d(n) = 0$, то уравнение называют *однородным*. Если $a(n)$, $b(n)$ и $c(n)$ постоянны, то уравнение (1) называют *уравнением с постоянными коэффициентами*. Уравнение (1) можно решить методами, аналогичными методам решения уравнений первого порядка. Полагая $n = 0$, можно найти x_2, выразив его через x_0 и x_1 Полагая $n = 1$, выразим x_3 через x_2 и x_1 а затем через x_0 и x_1. Теоретически таким образом можно выразить x_n для любого n через x_0 и x_1, однако вычисления при этом оказываются очень громоздкими и вывести общую формулу для x_n крайне трудно. Случай постоянных коэффициентов все же поддается решению общими методами, содержащими сравнительно небольшой объем вычислений.

В данном параграфе займемся изучением линейного однородного разностного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

$$ax_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = 0. \qquad (2)$$

Будем считать, что a, b, и c — постоянные, причем $a \neq 0$. Соответствующее неоднородное уравнение будет рассмотрено в следующем параграфе. Уравнение (2) получается при изучении моделей роста и конкуренции популяций, а также в ряде других биологических задач. Описанная в главе 7 (§ 7.8) модель выживания и вымирания видов приводит к разностному уравнению такого типа.

Уравнение (2) можно переписать в виде $x_{n+2} = -(b/a)x_{n+1} - (c/a)x_n$ и затем решить, последовательно полагая $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$. При $n = 0$ получаем $x_2 = -(b/a)x_1 - (c/a)x_0$. Аналогично,

$$x_3 = -\frac{b}{a}x_2 - \frac{c}{a}x_1 = \frac{b^2 - ac}{a^2}x_1 + \frac{bc}{a^2}x_0\,.$$

Это приводит к крайне сложной формуле, позволяющей выразить x_n через x_0 и x_1. Более удобный метод вытекает из вида решения уравнения первого порядка $x_{n+1} = (1 + a)x_n$. В предыдущем параграфе получали решения вида $x_n = \lambda^n$, где $\lambda = 1 + a$. По аналогии с этим будем искать решение уравнения (2) в виде $x_n = \lambda^n$ при некоторых значениях λ.

Если $x_n = \lambda^n$ удовлетворяет уравнению (2), то

$$a\lambda^{n+2} + \lambda^{n+1} + c\lambda^n = 0$$

при $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$. В частности, полагая $n = 0$, получим

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0.$$

Это уравнение называется характеристическим для разностного уравнения. Оно является квадратным и имеет следующие корни:

$$\lambda_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\ \lambda_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

При решении характеристического уравнения следует рассматривать три случая. Два его корня могут быть действительными и различными (когда $b^2 - 4ac > 0$); они могут быть действительными и равными между собой ($b^2 - 4ac = 0$) или же комплексными ($b^2 - 4ac < 0$).

Если $b^2 - 4ac > 0$, то описанный выше метод дает два решения уравнения (2): $x_1 = \lambda_1{}^n$ и $x_2 = \lambda_2{}^n$. Общее решение имеет вид

$$x_n = k_1\lambda_1{}^n + k_2\lambda_2{}^n, \tag{3}$$

где k_1 и k_2 — произвольные постоянные. Всякое решение уравнения имеет такой вид при некоторых значениях постоянных k_1 и k_2. Чтобы убедиться в том, что получено решение, подставим выражение для x_n в уравнение (2):

$$ax_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = a\,(k_1\lambda_1{}^{n+2} + k_2\lambda_2{}^{n+2}) + b(k_1\lambda_1{}^{n+1} + k_2\lambda_2{}^{n+1}) +$$
$$+ c(k_1\lambda_1^n + k_2\lambda_2{}^n) = k_1\lambda_1^n\,(a\lambda_1^2 + b\lambda_1 + c) + k_2\lambda_2^n\,(a\lambda_2^2 + b\lambda_2 + c).$$

Так как λ_1 и λ_2 являются корнями квадратного уравнения $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$, то полученное выражение обращается в нуль, т.е. $x_n = k_1\lambda_1^n + k_2\lambda_2^n$ действительно является решением уравнения (2).

Постоянные k_1 и k_2 можно выразить через значения x_n при $x = 0$ и $n = 1$. Полагая $n = 0$ и $n = 1$ в общем решении (3), получаем $x_0 = k_1 + k_2$ и $x_1 = k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2$. Это простая система линейных уравнений относительно постоянных k_1 и k_2. Решая ее, получаем:

$$k_1 = \frac{x_1 - x_0\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2},\ k_2 = \frac{\lambda_1 x_0 - x_1}{\lambda_1 - \lambda_2},$$

Итак, если даны x_0 и x_1 то этим определено единственное решение уравнения (2).

Пример 1. Найти общее решение разностного уравнения второго порядка $x_{n+2} - 3x_{n+1} + 2x_n = 0$. Выписать формулу для x_n, если $x_0 = 1000$ и $x_1 = 1500$. Чему равно x_5?

Здесь характеристическим является уравнение $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, корни которого

$$\lambda_1 = \frac{3+\sqrt{9-4\cdot 2}}{2} = 2,\ \lambda_2 = \frac{3-\sqrt{9-4\cdot 2}}{2} = 1.$$

Согласно формуле (3), общее решение есть

$$x_n = k_1 \cdot 2^n + k_2 \cdot 1^n = k_1 \cdot 2^n + k_2.$$

Но $x_0 = k_1 + k_2 = 1000$ и $x_1 = 2k_1 + k_2 = 1500$. Решая эти уравнения относительно k_1 и k_2, находим $k_1 = 500$ и $k_2 = 500$. Таким образом, единственным решением, удовлетворяющим заданным начальным условиям, является

$$x_n = 500 \cdot 2^n + 500 = 500(1+ 2^n).$$

При $n = 5$ получаем $x_5 = 500(1 + 2^5) = 16\,500$.

Проанализируем теперь случай, когда $b^2 - 4ac = 0$. Здесь корни характеристического уравнения равны между собой: $\lambda_1 = \lambda_2 = - b_1/(2a)$; рассматриваемый метод порождает лишь одно решение $x_n = \lambda_1{}^n$. Покажем, что в этом случае другим решением уравнения (2) служит $x_n = n\lambda_1{}^{n-1}$. Тогда общее решение можно записать в виде

$$x_n = k_1\lambda_1{}^n + k_2 n\lambda_1{}^{n-1}, \tag{4}$$

где $\lambda_1 = - b/(2a)$, а k_1 и k_2 – произвольные постоянные. Чтобы убедиться в том, что это решение, подставим выражение для x_n в уравнение (2):

$$ax_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = a\,(k_1\lambda_1^{n+2} + k_2\,(n + 2)\,\lambda_1^{n+1}) + b(k_1\lambda^{n+1} + k_2\,(n +1)\,\lambda_1^n) +$$
$$+ c\,(k_1\lambda_1^n + k_2 n\lambda_1^{n-1}) = k_1\lambda_1^n\,(a\lambda_1^2 + b\lambda_1 + c) + k_2 n\lambda^{n-1}\,(a\lambda_1^2 + b\lambda_1 + c) +$$
$$+ k_2\lambda_1^n\,(2a\lambda_1 + b).$$

Первые два слагаемых обращаются в нуль, так как $a\lambda_1{}^2 + b\lambda_1 + c = 0$, Третье слагаемое равно нулю, поскольку $\lambda_1 = - b/(2a)$ и $2a\lambda_1 + b = 2a[-b/(2a)] + b = 0$. Итак, получаем, что формула (4) дает решение уравнения (2). Постоянные k_1 и k_2 можно выразить через x_0 и x_1. Полагая $n = 0$ и $n = 1$ в общем решении (4), получаем уравнения $x_0 = k_1$, и $x_1 = k_1\lambda_1 + k_2$, откуда $k_1 = x_0$, а $k_2 = x_1 - k_1\lambda_1$. Этот случай иллюстрируется следующим примером.

Пример 2. Найти общее решение разностного уравнения второго порядка $x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = 0$. Найти x_n, если $x_0 = 500$ и $x_1 = 1000$. Чему равно x_5?

Характеристическим является уравнение $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$. Здесь $b^2 - 4ac = 0$ и единственным корнем является $\lambda_1 = - b/(2a) = 4/2 = 2$. Поэтому общее решение имеет вид $x_n = k_1 \cdot 2^n + k_2 n 2^{n-1}$. Полагая $n = 0$ и $n = 1$, получаем $x_0 = 500 = k_1$ и $x_1 = 1000 = 2k_1 + k_2$, откуда находим $k_1 = 500$ и $k_2 = 0$. Таким образом, $x_n = 500 \cdot 2^n$. В частности, $x_5 = 500 \cdot 2^5 = 16\,000$.

Остается рассмотреть третий случай, когда $b^2 - 4ac < 0$. В этом случае корни λ_1 и λ_2 являются комплексно-сопряженными числами:

$$\lambda_1 = -\frac{b}{2a} + i\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a} \text{ и } \lambda_2 = -\frac{b}{2a} - i\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}.$$

Эти числа можно записать в показательной форме (см., например [1], § 4.7) $\lambda_1 = re^{i\theta}$ и $\lambda_2 = re^{-i\theta}$, где $r = \sqrt{c/a}$, а $tg\theta = \frac{-\sqrt{4ac-b^2}}{b}$ Таким образом,

$$\lambda_1^n = r^n e^{in\theta} = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta) = (c/a)^{n/2} (\cos n\theta + i \sin n\theta).$$

Аналогично, $\lambda_2{}^n = (c/a)^{n/2} (\cos n\theta - i \sin n\theta)$.

Как и в двух предыдущих случаях, любая линейная комбинация этих решений λ_1^n и λ_2^n также является решением. В частности, решениями являются $(1/2)\,(\lambda_1^n + \lambda_2^n) = (c/a)^{n/2} \cos n\theta$ и $[1/(2i)]\,(\lambda_1{}^n - \lambda_2{}^n) = (c/a)^{n/2} \sin n\theta$. Используя эти два решения, можно записать общее решение уравнения (2) в виде

$$x_n = k_1 (c/a)^{n/2} \cos n\theta + k_2 (c/a)^{n/2} \sin n\theta.$$

Постоянные k_1 и k_2, как и прежде, можно выразить через x_0 и x_1.

З а д а ч а (модель роста с влиянием предшествующих поколений). Рассмотрим популяцию, которая увеличивается от поколения к поколению. Пусть x_n соответствует размеру популяции в *n-м* поколении. Ясно, что размер популяции в n-м поколении зависит от популяции в предыдущем поколении и может также зависеть от популяций в других предшествующих поколениях. Предшествующие поколения могут, например, исчерпав большую часть имеющихся ресурсов, затруднить воспроизводство популяции или сделать его невозможным.. В качестве модели роста популяции от поколения к поколению можно рассматривать уравнение $x_{n+2} = rx_{n+1} + sx_n$. Популяция в $(n + 2)$-м поколении составлена из двух частей, соответствующих вкладам $(n + 1)$-го и n-го поколений. Постоянные r и s показывают относительную важность двух соответствующих членов. Характеристическим служит уравнение $\lambda^2 - r\lambda + s = 0$ с корнями $\lambda_1 = \frac{r+\sqrt{r^2+4s}}{2}$ и $\lambda_2 = \frac{r-\sqrt{r^2+4s}}{2}$.

Если $r^2 + 4s > 0$, то эти корни действительны и различны и общим решением является $x_n = k_1\lambda_1{}^n + k_2\lambda_2^n$. Если же $r^2 + 4\wedge < 0$ (что имеет место, когда s — достаточно большое отрицательное число), то общее решение имеет иной вид: $x_n = (-s)^{n/2} (k_1 \cos n\theta + k_2 \sin n\theta)$, где $tg\theta = \frac{-\sqrt{-\left(r^2+4s\right)}}{r}$. В этой очень простой модели получен интересный результат, состоящий в том, что если на смертность в данном поколении существенно влияют особи, родившиеся двумя поколениями раньше, то численность популяции от поколения к поколению будет испытывать колебания.

Пример 3. Найти общее решение разностного уравнения второго порядка $x_{n+2} + x_{n+1} + x_n = 0$. Найти x_n, если $x_0 = 100$, а $x_1 = 0$. Характеристическое уравнение $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$ имеет комплексные корни $\lambda_1 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ и $\lambda_2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$. Параметры экспоненциальной формы $r = (c/a)^{n/2} = 1$ и $\theta = 2\pi/3$ (так как $tg\theta = -\sqrt{3}$).

Общее решение $x_n = k_1 \cos(2n\pi/3) + k_2 \sin(2n\pi/3)$. Полагая $n = 0$ и $n = 1$, получаем $x_0 = 100 = k_1$ и $x_1 = 0 = -\left(1/2\right)k_1 + \left(\sqrt{3}/2\right)k_2$. Отсюда $k_1 = 100$ и $k_2 = 100/\sqrt{3}$. Искомое решение есть $x_n = 100\cos\left(2n\pi/3\right) + \left(100/\sqrt{3}\right)\sin\left(2n\pi/3\right)$.

§ 6.4. ПОНЯТИЕ О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ

В §§ 6.4, 6.5 рассмотрено применение элементов дифференциальных уравнений к школьным дисциплинам (физике, химии, биологии).

1. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям. В различных областях науки и техники весьма часто встречаются задачи, для решения которых требуется решить одно или несколько уравнений, содержащих производные некоторых функций. Такие уравнения называются *дифференциальными*.

Задача 1. На плоскости xOy требуется найти кривую, проходящую через точку $O(0; 0)$ и обладающую тем свойством, что угловой коэффициент касательной, проведенной в любой точке кривой, равен удвоенной абсциссе точки касания.

Пусть $y = f(x)$ — уравнение искомой кривой. По условию, в каждой точке $M(x; f(x))$ имеется касательная к этой кривой, угловой коэффициент которой, т. е. $f'(x)$, равен $2x$. Таким образом,

$$y' = 2x. \tag{1}$$

Это дифференциальное уравнение, так как оно содержит производную искомой функции. Из уравнения (1) следует, что функция y есть первообразная функции $2x$. Поэтому

$$y = \int 2x dx$$

или

$$y = x^2 + C, \tag{2}$$

где C — произвольная постоянная.

Из формулы (2) видно, что дифференциальное уравнение (1) имеет бесконечное множество решений. Чтобы из этого множества решений выбрать искомое, надо воспользоваться тем, что искомая кривая проходит через точку О (0; 0). Следовательно, координаты этой точки должны удовлетворять уравнению (2), т.е. $0 = 0 + C$, откуда $C = 0$. Итак, искомая кривая — это парабола $y = x^2$.

Задача 2. Требуется найти закон движения свободно падающего в пустоте тела, если пройденный путь начинает отсчитываться от момента времени $t = 0$ и начальная скорость падения равна нулю. В этом случае, как известно, скорость выражается формулой $\upsilon = gt$.

Так как скорость прямолинейного движения есть производная пути по времени, то

$$\upsilon = s' = gt. \tag{3}$$

Из этого уравнения следует, что функция s есть первообразная функции gt. Поэтому

$$s = \int gt dt$$

или

$$s = \frac{gt^2}{2} + C\,. \tag{4}$$

Для нахождения произвольной постоянной C воспользуемся тем, что начало отсчета пути совпадает с началом отсчета времени, т. е. $s = 0$ при $t = 0$. Подставляя эти значения в равенство (4), имеем $0 = 0 + C$, откуда $C = 0$ и, следовательно,

$$s = \frac{gt^2}{2}\,.$$

2. Дифференциальное уравнение и его решение. В рассмотренных двух задачах мы пришли к дифференциальному уравнению вида $y' = \varphi(x)$. Это уравнение является простейшим дифференциальным уравнением. Однако в большинстве случаев естественные и другие процессы описываются гораздо более общими и сложными дифференциальными уравнениями.

Дифференциальным уравнением называется соотношение, связывающее независимую переменную x, искомую функцию $y = f(x)$ и ее производные.

Всякая функция $y = f(x)$, которая, будучи подставлена в это уравнение, обращает его в тождество, называется *решением* уравнения. Например, функции $y = x^2$ и $s = \frac{gt^2}{2}$ являются решениями соответственно уравнений (1) и (3), поскольку функция $y = x^2$ обращает в тождество уравнение (1), а функция $s = \frac{gt^2}{2}$ — уравнение (3).

В функции (2) и (4), также являющиеся решениями соответственно уравнений (1) и (3), входит произвольная постоянная C. Такие решения называются *общими решениями* этих уравнений.

Решение, которое получается из общего решения при некотором фиксированном значении произвольной постоянной C, называется *частным решением*. Например, функции $y = x^2$ и $s = \frac{gt^2}{2}$ — частные решения соответственно уравнений (1) и (3).

Условие, состоящее в том, что при $x = x_0$ значение функции y должно быть равно заданному числу y_0, называется *начальным условием*. Начальное условие дает возможность выделить из общего решения какое-либо частное решение.

Порядок старшей производной, входящей в дифференциальное уравнение, называется *порядком* данного уравнения. Например, уравнения $y' - y = 0$ и $y'' + y = 0$ имеют соответственно первый и второй порядок. Заметим, что в общее решение уравнения первого порядка, как это было видно на примере уравнений (1) и (3), входит одна произвольная постоянная, в общее же решение уравнения второго порядка — две произвольные постоянные и т. д.

3. Простейшие дифференциальные уравнения.

1) $y' = 0$. Общее решение: $y = C$, где C — произвольная постоянная;

2) $y'' = f(x)$, где $f(x)$ — заданная функция. Общее решение: $y = \int f(x)dx + C$, где C — произвольная постоянная;

3) $y' = ay$, где a — заданное постоянное число. Общее решение; $y = Ce^{ax}$, где C — произвольная постоянная. Уравнение $y' = ay$ при $a > 0$ называется *дифференциальным уравнением показательного роста*, при $a < 0$ — *дифференциальным уравнением показательного убывания*. К этим уравнениям сводится решение многих задач из физики, техники, биологии и социальных наук;

4) $y'' + \omega^2 y = 0$, где ω — постоянное число. Общее решение: $y = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x$, где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Это уравнение называется *уравнением гармонических колебаний*.

§ 6.5. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ИЗ ШКОЛЬНЫХ ДИСЦИПЛИН

1. Радиоактивный распад.

Задача. Скорость распада радия в каждый момент времени прямо пропорциональна его наличной массе. Найти закон распада радия, если известно, что в начальный момент $t = 0$ имелось m_0 г радия и период полураспада радия (период времени, по истечении которого распадается половина наличной массы радия) равен 1590 лет.

Решение. Пусть в момент времени t масса радия составляет x г. Тогда скорость распада радия равна

$$(m_0 - x)' = -x'.$$

По условию задачи $-x' = kx$ или

$$x' = -kx, \tag{1}$$

где $k > 0$ — коэффициент пропорциональности. Отсюда

$$\frac{x'}{x} = -k \text{ или } (\ln x)' = -k$$

и, значит,

$$\ln x = -k\int dt = -kt + C_1 = -kt + \ln e^{C_1},$$

что дает $x = Ce^{-kt}(C = e^{C1})$, откуда

$$x = Ce^{-kt}. \tag{2}$$

Для определения C используем начальное условие: при $t = 0$ $x = m_0$. Имеем: $C = m_0$ и, значит,

$$x = m_0 e^{-kt}. \tag{3}$$

Коэффициент пропорциональности k определяем из дополнительного условия: $x = \frac{m_0}{2}$ при $t = 1590$. Имеем:

$$\frac{m_0}{2} = m_0 e^{-1590k} \text{ или } e^{1590k} = 2$$

и, следовательно, $e^k = 2^{\frac{1}{1590}}$. Поэтому искомая функция

$$x = m_0 2^{-\frac{t}{1590}}.$$

2. Потеря заряда проводником.

Задача. Изолированному проводнику сообщен заряд $Q_0 = 1000$ К. Вследствие несовершенства изоляции проводник постепенно теряет свой заряд. Скорость потери заряда в данный момент прямо пропорциональна наличному заряду проводника. Какой заряд останется на проводнике по истечении времени $t = 10$ мин, если за первую минуту потеряно 100 К?

Решение. Пусть в момент времени t заряд проводника равен Q. Тогда скорость потери заряда в этот момент равна $-Q'$. По условию задачи

$$-Q' = kQ \text{ или } Q' = -kQ,$$

где $k > 0$ — коэффициент пропорциональности. Последнее уравнение есть уравнение вида (1) с начальным условием $Q = Q_0$ при $t = 0$. Значит, согласно формуле (3)

$$Q = Q_0 e^{-kt}.$$

Далее, используя дополнительное условие: при $t = 1$ мин $Q = 900$ К, — имеем:

$$900 = 1000\ e^{-k},\ e^{-k} = 0{,}9.$$

Поэтому

$$Q = 1000\ (0{,}9)^t.$$

Следовательно, через 10 мин на проводнике останется заряд $Q = 1000(0{,}9)^{10} \approx 348{,}7$ К.

3. Химические реакции.

Порядок химической реакции равен общему числу молекул, входящих в левую часть химического уравнения. Так, RaB $\to$ RaC есть реакция первого порядка. Скорость реакции есть скорость υ, с которой система компонентов левой части превращается в систему компонентов правой части уравнения реакции. Действующая масса или концентрация реагирующего вещества A есть количество молей[1] этого вещества в единице объема. Согласно закону действующих масс скорость реакции прямо пропорциональна действующим массам в данный момент.

Химические реакции первого порядка

Если a — начальная концентрация вещества A, x — количество молей на 1 л, прореагировавших за время t от начала реакции, то скорость реакции x', а действующая масса к этому моменту $a - x$. Согласно закону действующих масс $x' = k(a - x)$ или

$$\theta' = -k\theta, \tag{4}$$

где $k>0$ — коэффициент пропорциональности (константа скорости), зависящий от рода и условий химического процесса, и $\theta = a - x$. Значит, $\theta = a$ при $t = 0$ — начальное условие для уравнения (4).

Уравнение (4) есть уравнение вида (1) из пункта «Радиоактивный распад». Следовательно, согласно формуле (3) того же пункта

$$\theta = ae^{-kt} \text{ или } a - x = ae^{-kt},$$

откуда

$$x = a\ (1 - e^{-kt}). \tag{5}$$

Задача 1. Радиоактивный элемент RaB распадается наполовину, образуя радиоактивный элемент RaC, в течение 26,7 мин. Найдите время распада 0,2 первоначального количества RaB.

Решение. Здесь имеет место реакция первого порядка RaB $\to$ RaC. Поэтому согласно предыдущему дифференциальное уравнение реакции

$$x' = k(a - x)$$

[1] Моль, или грамм-молекула вещества, — число граммов этого вещества, равное его молекулярному весу. Например, 1 моль кислорода равен 16 г, 1 моль воды — 18 г.

и, значит, x определяется формулой (5). Из формулы (5) имеем

$$e^{-kt}=\frac{a-x}{a} \text{ или } e^{kt}=\frac{a}{a-x}$$

и, следовательно, $\ln\frac{a}{a-x}=kt$ откуда

$$t=\frac{1}{k}\ln\frac{a}{a-x}$$

Коэффициент пропорциональности k определяем из дополнительного условия: $x=\frac{a}{2}$ при $t = 26{,}7$. Имеем:

$$26{,}7=\frac{1}{k}\ln\frac{a}{a-\frac{a}{2}}=\frac{1}{k}\ln 2$$

или $k=\frac{\ln 2}{26{,}7}$. Теперь искомое время

$$t=\frac{26{,}7}{\ln 2}\ln\frac{a}{a-0{,}2a}=\frac{26{,}7}{\ln 2}\ln\frac{1}{0{,}8}=\frac{26{,}7}{\ln 2}\ln\frac{5}{4}\approx 8{,}6 \text{ (мин).}$$

4. Скорость размножения бактерий.

Задача. Скорость размножения бактерий прямо пропорциональна их количеству. В начальный момент $t = 0$ имелось 100 бактерий, а в течение 3 ч их число удвоилось. Найти зависимость количества бактерий от времени. Во сколько раз увеличится количество бактерий в течение 9 ч?

Решение. Пусть x—количество бактерий, имеющихся в данный момент. Тогда согласно условию задачи получим уравнение

$$x' = kx$$

($k > 0$ — коэффициент пропорциональности) с начальным условием $x = 100$ при $t = 0$. Это уравнение вида (1). Значит, согласно формуле (3) имеем

$$x = 100e^{kt}.$$

Коэффициент пропорциональности k определяем из дополнительного условия: $x = 200$ при $t = 3$. Имеем

$$200 = 100e^{3k} \text{ или } 2 = e^{3k}$$

и, следовательно, $e^k = 2^{1/3}$.

Поэтому искомая функция

$$x=100\cdot 2^{\frac{t}{3}},$$

откуда $x = 800$ при $t = 9$.

Следовательно, в течение 9 ч количество бактерий увеличится в 8 раз.

Упражнения

1. Определите порядок разностных уравнений:

а) $x_n = x_{n+1} + x_{n+3}$; б) $x_{n+1} = (x_n)^2 + (x_{n-1})^3$;

в) $x_n + nx_{n-1} = n^2$; г) $x_{n+2} + 4x_{n+1} + 4x_n = 2^n$;

д) $x_{n+1} = x_n + 1$; е) $x_n = x_{n-2} + x_{n-3}$.

2. Проверьте, что $x_n - n^2 + n$ является решением разностного уравнения $x_{n+1} = x_n + 2n + 2$. Покажите, что $x_n = n^2 + n + k$ также является решением при любом значении постоянной k.

3. Убедитесь в том, что $x_n = ca^n$ является решением разностного уравнения $x_{n+1} = ax_n$ при любом значении постоянной c. Найдите постоянные a и c, если известно, что $x_2 = 3$, а $x_3 = 5$.

4. Рост бактериальной культуры в питательной среде замеряется каждые два часа. Оказалось, что при каждом измерении популяция бактерий увеличивалась на 25% по сравнению с предыдущим измерением.

а) Опишите этот процесс роста с помощью разностного уравнения для x_n — размера популяции по прошествии n часов роста.

б) Каков порядок этого разностного уравнения?

в) Найдите x_2 и x_1, если $x_0 = 1600$.

Найдите общее решение для следующих разностных уравнений первого порядка:

5. $x_{n+1} - x_n = 2^{-n}$.

6. $x_{n+1} - x_n = 2x_n$.

7. $x_{n+1} = \frac{n+5}{n+3} x_n$.

8. $x_{n+1} = nx_n$.

9. $x_{n+1} - 3x_n = 3x_{n+1} - x_n$.

Найдите частное решение, удовлетворяющее начальному условию $x_0 = 1$, для следующих разностных уравнений первого порядка:

10. $2x_{n+1} = x_n$.

11. $x_{n+1} = x_n + e^{-n}$.

12. $(n + 1)\, x_{n+1} = (n + 2)x_n$.

13. $x_{n+1} - x_n = 2x_n + 2$.

Найдите общие решения для следующих разностных уравнений второго порядка:

14. $x_{n+2} = x_n + x_{n+1}$.

15. $x_{n+2} + 2x_{n+1} - 3x_n = 0$.

16. $4x_n + 4x_{n+1} + x_{n+2} = 0$.

17. $3x_{n+2} - 2x_{n+1} - x_n = 0$.

Найдите решения, удовлетворяющие начальным условиям $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, для следующих разностных уравнений второго порядка:

18. $x_{n+2} + x_{n+1} = 6x_n$.

19. $x_{n+2} + 2\, x_{n+1} + 2x_n = 0$.

20. $x_n = x_{n+2} - x_{n+1}$.

21. Скорость охлаждения тела в воздухе прямо пропорциональна разности между температурой тела и температурой воздуха. Температура воздуха равна 20 °С. Известно, что в течение 20 мин тело охлаждается от 100 до 60 °С. Определить закон изменения температуры θ тела в зависимости от времени t.

22. Вещество A превращается в вещество B. Спустя 1 ч после начала реакции осталось 44,8 г вещества A, а после 3 ч осталось 11,2 г вещества. Определить первоначальное количество a вещества A и время, когда останется половина этого вещества.

23. В культуре пивных дрожжей быстрота прироста действующего фермента прямо пропорциональна наличному его количеству x. Первоначальное количество фермента a в течение 1 ч удвоилось. Во сколько раз оно увеличится через 3 ч?

ГЛАВА 7.
ВЕРОЯТНОСТЬ

§ 7.1. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

1. Понятие о случайном событии. Опыт, эксперимент, наблюдение явления называется *испытанием.* Испытаниями, например, являются бросание монеты, выстрел из винтовки, бросание игральной кости (кубика с нанесенными на каждую грань числом очков — от одного до шести).

Результат, исход испытания, называется *событием.* Событиями являются выпадение герба или цифры, попадание в цель или промах, появление того или иного числа очков на брошенной игральной кости. Для обозначения событий используют большие буквы латинского алфавита: A, B, C и т. д.

Определение 1. Два события называют *совместимыми,* если появление одного из них не исключает появления другого в одном и том же испытании.

Пример 1. Испытание — однократное бросание игральной кости. Событие A — появление четырех очков. Событие B — появление четного числа очков. События A и B совместимые.

Определение 2. Два события называют *несовместимыми,* если появление одного из них исключает появление другого в одном и том же испытании.

Пример 2. Испытание — однократное бросание монеты. Событие A — выпадение герба, событие B — выпадение цифры. Эти события несовместимы, так как появление одного из них исключает появление другого.

Несовместимость более чем двух событий означает их попарную несовместимость.

Пример 3. Испытание — однократное бросание игральной кости. Пусть события A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 соответственно выпадение одного очка, двух, трех и т. д. Эти события являются несовместимыми.

Определение 3. Два сообытия A и B называются *противоположными,* если в данном испытании они несовместимы и одно из них обязательно происходит.

Событие, противоположное событию A, обозначают через $\bar{A}$.

Пример 4. Испытание — однократное бросание монеты. Событие A — выпадение герба, событие B — выпадение цифры.

Эти события противоположны, так как исходами бросания могут быть лишь они, и появление одного из них исключает появление другого, т. е. $A = \overline{B}$ или $\overline{A} = B$.

Определение 4. Событие называют *достоверным,* если в данном испытании оно является единственно возможным его исходом, и *невозможным*, если в данном испытании оно заведомо не может произойти.

Пример 5. Испытание — извлечение шара из урны, в которой все шары белые. Событие A — вынут белый шар — достоверное событие; событие B — вынут черный шар — невозможное событие.

Заметим, что достоверное и невозможное события в данном испытании являются противоположными.

Определение 5. Событие A называют *случайным,* если оно объективно может наступить или не наступить в данном испытании.

Пример 6. Событие A_6 — выпадение шести очков при бросании игральной кости — случайное. Оно может наступить, но может и не наступить в данном испытании.

Пример 7. Событие A_{98} — прорастание девяноста восьми зерен пшеницы из ста — случайное. Это событие может наступить, но, может быть, прорастет зерен больше или меньше.

Можно ли как-то измерить возможность появления некоторого случайного события? Другими словами, можно ли охарактеризовать эту возможность некоторым числом?

2. Классическое определение вероятности. Всякое испытание влечет за собой некоторую совокупность исходов — результатов испытания, т. е. событий. Во многих случаях возможно перечислить все события, которые могут быть исходами данного испытания.

Определение 1. Говорят, что совокупность событий образует *полную группу событий* для данного испытания, если его результатом обязательно становится хотя бы одно из них.

Приведем примеры полных групп событий: выпадение герба и выпадение цифры при одном бросании монеты; попадание в цель и промах при одном выстреле; выпадение одного, двух, трех, четырех, пяти и шести очков при одном бросании игральной кости.

Рассмотрим полную группу попарно несовместимых событий U_1, U_2, ..., U_n, связанную с некоторым испытанием. Предположим, что в этом испытании осуществление каждого из событий U_i ($i = 1, 2, ..., n$) равновозможно, т. е. условия испытания не создают преимущества в появлении какого-либо события перед другими возможными.

Определение 2. События U_1, U_2, ..., U_n, образующие полную группу попарно несовместимых и равновозможных событий, будем называть *элементарными событиями.*

Пример 1. Вернемся к опыту с подбрасыванием игральной кости. Пусть U_i — событие, состоящее в том, что кость выпала гранью с цифрой i. Как уже отмечалось (пункты 1, 2), события U_1, U_2, ..., U_6 образуют полную группу попарно несовместимых событий. Так как кость предполагается однородной и симметричной, то события U_1, U_2, ..., U_6 являются и равновозможными, т. е. элементарными.

Определение 3. Событие A *называют благоприятствующим* событию B, если наступление события A влечет за собой наступление события B.

Пример 2. Пусть при бросании игральной кости события U_2, U_4 и U_6 — появление соответственно двух, четырех и шести очков и A — событие, состоящее в появлении четного числа очков; события U_2, U_4, и U_6 благоприятствуют событию A.

Определение 4 (*классическое определение вероятности*). *Вероятностью* $P(A)$ события A называют отношение m/n числа элементарных событий, благоприятствующих событию A, к числу всех элементарных событий, т. е.

$$P(A)=\frac{m}{n}.$$

Пример 3. Вычислим вероятность выпадения герба при одном бросании монеты. Очевидно, событие A — выпадение герба и событие B — выпадение цифры образуют полную группу несовместимых и равновозможных событий для данного испытания. Значит, здесь $n - 2$. Событию A благоприятствует лишь одно событие — само A, т. е. здесь $m = 1$. Поэтому $P(A)=\frac{1}{2}$.

Пример 4. Очевидно, что в опыте с игральной костью (см. п. 2, пример 1) $P(U_i)=\frac{1}{6}$, i= 1, 2, ..., 6.

Пример 5. Найти вероятноть того, что при бросании игральной кости выпадет число очков, делящееся на 2 (событие A).

Число элементарных событий здесь 6. Число благоприятствующих элементарных событий 3 (выпадение 2, 4 и 6). Поэтому

$$P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}.$$

Задача 1 (вероятности рождения мальчиков и девочек). Будем предполагать, что рождения мальчиков и девочек — равновозможные события.

Пусть в семье двое детей. Какова вероятность, что оба ребенка — мальчики? Если известно, что один мальчик, какова вероятность, что оба ребенка — мальчики?

На первый вопрос ответить нетрудно. Имеется четыре равновозможных исхода: ММ, МД, ДМ, ДД (М — мальчик, Д — девочка). Исходы МД и ДМ различны, так как в первом из них стачала родился мальчик, а потом девочка, во втором — наоборот. Из этих четырех исходов только один ММ благоприятствует нашему событию. Отсюда следует, что $P(MM)=\frac{1}{3}$.

Если дополнительно известно, что один ребенок — мальчик, то событие ДД исключается. Из трех равновозможных событий ММ, МД, ДМ по-прежнему только одно ММ благоприятствует желаемому исходу. Поэтому $P(MM)=\frac{1}{3}$.

Если известно, что старший ребенок — мальчик, то исключаются ДМ и ДД. В этом случае $P(MM)=\frac{1}{2}$.

Пример *7* [18]. У кабинета дежурного психотерапевта ожидают приема трое больных. Врачу известно по медицинским карточкам, что один из ожидающих, по фамилии Петров, болел в прошлом маниакально-депрессивным психозом. Врач интересуется этим больным, но не хочет вне очереди вызывать его в кабинет. Обозначим как событие A тот факт, что в кабинет врача входит больной Петров; как событие B обозначим то, что входит другой больной — Сидоров (событие B_1) или Иванов (событие B_2). События A, B_1 и B_2 — несовместимы и образуют полную группу (предполагается, что к врачу больные входят по одному). Так как появиться, согласно очереди, может равновероятно любой из больных, то к началу приема вероятность появиться первым в кабинете врача для одного из больных, в том числе для Петрова, равна $\frac{1}{3}$.

Задача 2 [1]. При составлении команды космического корабля возникает вопрос о психологической совместимости отдельных членов экипажа. Допустим, что надо составить команду из трех человек: командира, инженера и врача. На место командира есть три кандидата a_1, a_2, a_3, на место инженера — четыре кандидата — b_1, b_2, b_3, b_4, на место врача — два кандидата c_1, c_2. Проведенная проверка показала психологическую несовместимость командира a_2 с инженерами b_3, b_4 и с врачом c_2, а также инженера b_2 с врачом c_2. Будем для простоты считать, что без учета фактора несовместимости все варианты составления команды равновозможны. Какова в этом случае вероятность того, что будет составлен экипаж, все члены которого психологически совместимы друг с другом?

Представим все варианты команды, при которых члены экипажа совместимы друг с другом в виде «дерева» (рис. 34). Число ветвей этого дерева, т. е. исходов, благоприятствующих событию A, равно 16, а общее число возможных комбинаций по правилу умножения равно произведению $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$. Искомая вероятность

$$P(A) = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}.$$

Из приведенного классического определения вероятности вытекают следующие ее свойства.

1. *Вероятность достоверного события равна единице.* Действительно, достоверному событию должны благоприятствовать все n элементарных событий, т. е. $m = n$, следовательно,

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{n}{n} = 1.$$

2. *Вероятность невозможного события равна нулю.* В самом деле, невозможному событию не может благоприятствовать ни одно из элементарных событий, т. е. $m = 0$, откуда

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{0}{n} = 0.$$

3. *Вероятность случайного события есть положительное число, заключенное между нулем и единицей.*

Действительно, случайному событию благоприятствует лишь часть из общего числа элементарных событий. Поэтому в этом случае $0 < m < n$ и, значит, $0 < \frac{m}{n} < 1$. Следовательно, $0 < P(A) < 1$.

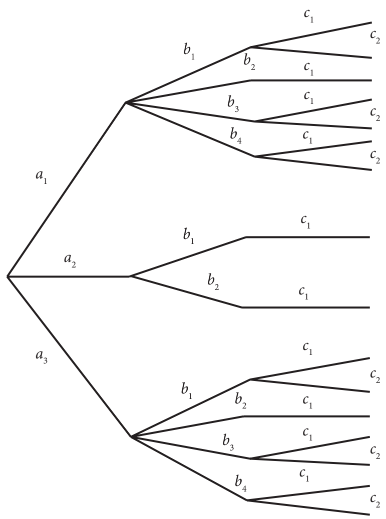


Рис 34

Итак, вероятность любого события удовлетворяет двойному неравенству

$$0 \le P(A) \le 1.$$

3. Относительная частота. Статистическое определение вероятности. Классическое определение вероятности не является пригодным для изучения произвольных случайных событий. Так, оно неприемлемо, если результаты испытания неравновозможны. Например, при бросании неправильной игральной кости выпадение ее различных граней неравновозможно.

В таких случаях используется так называемое статистическое определение вероятности.

Пусть произведено n испытаний, при этом некоторое событие A наступило m раз $(m \le n)$.

Определение 1. Число m называют *абсолютной частотой* (или просто *частотой*) события A, а отношение

$$P^*(A) = \frac{m}{n}$$

называют относительной частотой события A.

Пример 1. При транспортировке из 10 000 арбузов испортилось 26. Здесь $m = 26$ — абсолютная частота испорченных арбузов, а

$$P^*(A) = \frac{26}{10000} = 0{,}0026$$

— относительная.

Результаты многочисленных опытов и наблюдений описанные, например, в [7, 19], помогают заключить: при проведении серий из n испытаний, когда число n сравнительно мало, относительная частота $P^*(A)$ принимает значения, которые могут довольно сильно отличаться друг от друга. Но с увеличением n — числа испытаний в сериях — относительная частота

$$P^*(A) = \frac{m}{n}$$

приближается к некоторому числу $P(A)$, стабилизируясь возле него и принимая все более устойчивые значения.

Пример 2. Было проведено 10 серий бросаний монеты, по 1000 бросаний в каждой. Относительные частоты выпадения герба оказались равными 0,501; 0485; 0,509; 0,536; 0,485; 0,488; 0,500; 0,497; 0,494; 0,484 (см. [19]). Эти частоты группируются около числа 0,5.

Определение 2 (*статистическое определение вероятности*). Вероятностью события A в данном испытании называют число $P(A)$, около которого группируются значения относительной частоты при больших n.

В условиях только что приведенного примера 2 указанная вероятность равна 0,5.

П р и м е р 3. По официальным данным шведской статистики, относительные частоты рождения девочек по месяцам 1935 г. характеризуются следующими числами (расположены в порядке следования месяцев, начиная с января): 0,486; 0,489; 0,490; 0,471; 0,478; 0,482; 0,462; 0,484; 0,485; 0,491; 0,482; 0,473 (см. [7]). Эти частоты группируются около числа 0,482.

Таким образом, относительная частота события приближенно совпадает с его вероятностью, если число испытаний достаточно велико. Имеется огромный опытный материал по проверке последнего утверждения. Укажем еще один такой пример с бросанием монеты (см. [7]).

Экспериментатор	Число бросаний	Число выпадений герба	Относительная частота
Бюффон	4040	2048	0,5080
К . Пирсон	12000	6019	0,5016
К. Пирсон	24000	12012	0,5005

Здесь относительные частоты незначительно отклоняются от числа 0,5, причем тем меньше, чем больше число испытаний. При 4040 испытаниях отклонение равно 0,008, а при 24000 — 0,0005.

Кроме классического и статистического определений вероятности, существует еще два определения вероятности: геометрическое и аксиоматическое (см., например [4]). Большая заслуга в аксиоматическом построении теории вероятностей принадлежит советскому математику А.Н. Колмогорову (1903—1987).

§ 7.2. СВОЙСТВА ВЕРОЯТНОСТИ

1. Теорема сложения вероятностей несовместимых событий.

О п р е д е л е н и е 1. *Суммой событий A и B называют событие $C = A + B$, состоящее в наступлении, по крайней мере, одного из событий A или B.*

П р и м е р 1. Испытание — стрельба двух стрелков (каждый делает по одному выстрелу). Событие A — попадание в мишень первым стрелком, событие B — попадание в мишень вторым стрелком. Суммой событий A и B будет событие $C = A + B$, состоящее в попадании в мишень, по крайней мере, одним стрелком.

Аналогично суммой конечного числа событий $A_1, A_2, ..., A_k$ называют событие $A = A_1 + A_2 + ... + A_k$, состоящее в наступлении хотя бы одного из событий A_i $(i = 1, ..., k)$.

Из определения 1 непосредственно следует, что $A + B = B + A$. Справедливо также сочетательное свойство. Однако $A + A = A$ (а не $2A$, как в алгебре).

Определение 2. *Произведением* событий A и B называют событие $C = AB$, состоящее в том, что в результате испытания произошло и событие A, и событие B.

Аналогично произведением конечного числа событий $A_1, A_2, ..., A_k$ называют событие $A = A_1A_2 ... A_k$, состоящее в том, что в результате испытания произошли все указанные события.

В условиях предыдущего примера произведением событий A и B будет событие $C = AB$, состоящее в попадании в мишень двух стрелков.

Из определения 2 непосредственно следует, что $AB=BA$.

Справедливы также сочетательный и дистрибутивный законы. Однако $A \cdot A = A$ (а не A^2).

Теорема. *Вероятность суммы двух несовместимых событий A и B равна сумме вероятностей этих событий:*

$$P(A + B) = P(A) + P(B). \qquad (1)$$

Доказательство. Используем классическое определение вероятности. Предположим, что в данном испытании число всех элементарных событий равно n, событию A благоприятствуют k элементарных событий, событию B – l элементарных событий. Так как A и B — несовместимые события, то ни одно из элементарных событий $U_1, U_2, ..., U_n$ не может одновременно благоприятствовать и событию A, и событию B. Следовательно, событию $A + B$ будет благоприятствовать $k + l$ элементарных событий. По определению вероятности

$$P(A) = \frac{k}{n},\ P(B) = \frac{l}{n},\ P(A+B) = \frac{k+l}{n},$$

откуда и следует утверждение теоремы.

Совершенно так же теорема формулируется и доказывается для любого конечного числа попарно несовместимых событий.

Следствие 1. Если события $A_1, A_2, ..., A_n$ *образуют полную группу попарно несовместимых событий, то сумма их вероятностей равна единице:*

$$P(A_1) + P(A_2)+... + P(A_n) = 1.$$

Доказательство. Так как события $A_1, A_2, ..., A_n$ образуют полную группу, то появление хотя бы одного из них — достоверное событие, и, значит,

$$P(A_1 + A_2 +... + A_n) = 1.$$

А так как эти события и несовместимые, то

$$P(A_1 + A_2 +... + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n),$$

что и приводит к искомому равенству.

Следствие 2. *Сумма вероятностей противоположных событий A и $\bar{A}$ равна единице:*

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1. \qquad (2)$$

Это следствие — частный случай следствия 1.

Пример 2. В урне 10 шаров: 3 красных, 5 синих и 2 белых. Какова вероятность вынуть цветной шар, если вынимается один шар? Вероятность вынуть красный шар $P(A)=\frac{3}{10}$, синий $P(A)=\frac{5}{10}$. Так как события A и B несовместимы, то по доказанной выше теореме

$$P(A+B)=P(A)+P(B)=\frac{3}{10}+\frac{5}{10}=0{,}8.$$

Пример 3. На клумбе растут 20 красных, 30 синих и 40 белых астр. Какова вероятность сорвать в темноте окрашенную астру, если срывают одну астру? Искомая вероятность равна сумме вероятностей сорвать красную или синюю астру, т. е.

$$P=\frac{20}{90}+\frac{30}{90}=\frac{50}{90}=\frac{5}{9}.$$

2. Теорема умножения вероятностей.

Определение 1. Два события A и B называют *независимыми,* если вероятность появления каждого из них не зависит от того, появилось другое событие или нет[1]. В противном случае события A и B называют *зависимыми.*

Пример 1. Пусть в урне находятся 2 белых и 2 черных шара.

Пусть событие A — вынут белый шар. Очевидно, $P(A)=\frac{1}{2}$. После первого испытания вынутый шар кладется обратно в урну, шары перемешиваются и снова вынимается шар. Событие B — во втором испытании вынут белый шар — также имеет вероятность $P(B)=\frac{1}{2}$. т. е. события A и B — независимые.

Предположим теперь, что вынутый шар в первом испытании не кладется обратно в урну. Тогда если произошло событие A, т. е. в первом испытании вынут белый шар, то вероятность события B уменьшается $\left(P(B)=\frac{1}{3}\right)$; если в первом испытании был вынут черный шар, то вероятность события B увеличивается $\left(P(B)=\frac{2}{3}\right)$.

Итак, здесь вероятность события B существенно зависит от того, произошло или не произошло событие A, в таких случаях события A и B — зависимые.

---

[1] Несколько событий A_1, ..., A_k называют *независимыми* в совокупности (или просто *независимыми*), если вероятность появления любого из них не зависит от того, произошли какие-либо другие рассматриваемые события или нет.

Определение 2. Пусть A и B — зависимые события. *Условной вероятностью* $P_A(B)$ (или что то же $P(B/A)$) события B называют вероятность события B, найденную в предположении, что событие A уже наступило.

Так, в примере 1 $P_A(B)=\frac{1}{3}$.

Заметим, что если события A и B независимы, то $P_A(B) = P(B)$.

Теорема 1. *Вероятность произведения двух зависимых событий A и B равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, найденную в предположении, что первое событие уже наступило:*

$$P(AB)=P(A)P_A(B). \tag{3}$$

Доказательство. Пусть из всего числа n элементарных событий k благоприятствуют событию A и пусть из этих k событий l благоприятствуют событию B, а значит, и событию AB. Тогда

$$P(AB)=\frac{l}{n}=\frac{k}{n}\cdot\frac{l}{k}=P(A)P_A(B),$$

что и доказывает искомое равенство (3).

Замечание 1. Применив формулу (3) к событию BA, получим

$$P(BA) = P(B)P_B(A). \tag{3$'$}$$

Так как $AB = BA$ (см. пункт 1), то, сравнивая (3) и (3′), получаем, что

$$P(A)P_A(B) = P(B)P_B(A). \tag{4}$$

Замечание 2. Теорему 1 можно обобщить на произведение любого конечного числа событий.

В частности, для трех событий A, B, C получаем

$$P(ABC)= P(A)P(B/A)P(C/AB). \tag{3”}$$

Пример 2. В условиях примера 1 берем тот случай, когда вынутый шар в первом испытании не кладется обратно в урну. Поставим следующий вопрос: какова вероятность вынуть первый и второй раз белые шары? По формуле (3) имеем

$$P(AB)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}.$$

Пример 3. Предположим, что вероятности встретить реку, загрязняемую постоянным фактором $P(A)$, временным фактором $P(B)$ и обоими факторами $P(AB)$, равны соответственно 0,4; 0,1 и 0,05.

Найдите 1) вероятность того, что река, загрязняемая временным фактором, будет к тому же загрязнена и постоянным фактором, т. е. $P_B(A)$;

2) вероятность того, что река, загрязняемая постоянным фактором, будет еще загрязнена и временным фактором, т. е. $P_A(B)$. Из формулы (3′) находим

$$P_B(A) = \frac{P(AB)}{P(B)},$$

откуда

$$P_B(A) = \frac{0{,}05}{0{,}1} = 0{,}5.$$

Аналогично, используя формулу (3), находим

$$P_A(B) = \frac{0{,}05}{0{,}4} = 0{,}125.$$

Пример 4. В терапевтическом отделении больницы 70% пациентов — женщины, а 21% — курящие мужчины. Наугад выбирают пациента. Он оказывается мужчиной. Какова вероятность, что он курит?

Пусть M означает, что пациент — мужчина, а K — что пациент курит. Тогда в силу условия задачи $P(M) = 0{,}3$, а $P(MK) = 0{,}21$. Поэтому с учетом формулы (3) искомая условная вероятность

$$P_M(K) = \frac{P(MK)}{P(M)} = \frac{0{,}21}{0{,}3} = 0{,}7.$$

Пример 5. В группе туристов 20% детей, причем 12% девочки. Наугад выбирают ребенка. Какова вероятность, что это девочка? Какова вероятность, что это мальчик?

Пусть A означает, что турист — ребенок, $Ж$ — турист женского пола, M — мужского. Тогда по условию $P(A) = 0{,}2$, $P(ЖA) = 0{,}12$, $P(MA) = 0{,}08$. Следовательно,

$$P_A(Ж) = \frac{P(ЖA)}{P(A)} = \frac{0{,}12}{0{,}2} = 0{,}6,$$

$$P_A(M) = \frac{P(MA)}{P(A)} = \frac{0{,}08}{0{,}2} = 0{,}4.$$

Пример 6 [1]. Для того чтобы проверить сохранность узнавания с помощью осязания, испытуемого просят закрыть глаза, кладут ему в руки предмет и спрашивают, является ли предмет упругим (событие А), округлым (событие В) и объемным (событие С). Найдем вероятность иллюзии сознательно правильного ответа на все три вопроса, если испытуемый каждый раз угадывает ответ, но знает список предъявляемых объектов: теннисный мяч, монета, медный шарик, брусок каучука, железная пластинка, поролоновый диск. Найдем искомую вероятность в случае предъявления теннисного мяча.

Имеем

$P(A)=\frac{3}{6}$; 3 объекта являются упругими (теннисный мяч, брусок каучука, поролоновый диск).

$P(B/A)=\frac{2}{3}$; 2 из упругих — упругих — округлые (теннисный мяч и поролоновый диск).

$P(C/AB)=\frac{1}{2}$; мяч объемен, поролоновый диск — нет.

Следовательно, согласно формуле (3»)

$$P(ABC)=\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}.$$

Задача (курение и заболевание легких). В группе обследуемых 1000 человек. Из них 600 курящих и 400 некурящих. Среди курящих 240 человек имеют те или иные заболевания легких. Среди некурящих легочных больных 120 человек. Является ли курение и заболевание легких независимыми событиями?

Пусть событие A — обследуемый курит, событие B — обследуемый страдает заболеванием легких.

Тогда, согласно условию задачи,

$$P(B)=\frac{240+120}{1000}=0{,}36,$$

$$P_A(B)=\frac{240}{600}=\frac{2}{5}=0{,}4.$$

Так как $0{,}36 \neq 0{,}4$, события A и B зависимые.

Теорема 2. *Вероятность произведения двух независимых событий A и B равна произведению вероятностей этих событий:*

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B). \tag{5}$$

Действительно, если A и B — независимые события, то $P_A(B) = P(B)$ и формула (3) превращается в формулу (5).

Замечание 1. В случае независимых событий в совокупности эта теорема распространяется на любое конечное число их, т. е. имеет место равенство

$$P(A_1A_2...A_n) = P(A_1)P(A_2)...P(A_n).$$

Замечание 2. Если события $A_1, A_2, ..., A_n$ независимы в совокупности, то и противоположные им события $\bar{A}_1, \bar{A}_2, ..., \bar{A}_n$ также независимы в совокупности.

Пример 7. Найдем вероятность одновременного поражения цели двумя орудиями, если вероятность поражения цели первым орудием (событие A) равна 0,8, а вторым (событие B) — 0,7.

События A и B независимы, поэтому искомая вероятность

$$P\ (AB)\ = 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}56.$$

Пример 8. Вероятность выживания одного организма в течение 20 мин $P = 0{,}7$. В пробирке с благоприятными для существования этих организмов условиями находятся только что родившиеся 2 организма. Какова вероятность того, что через 20 мин они будут живы?

Пусть событие A — первый организм жив через 20 мин, событие B — второй организм жив через 20 мин. Будем считать, что между организмами нет внутривидовой конкуренции, т. е. события A и B независимы. Событие, что оба организма живы, есть событие AB. По теореме 2 получаем $P(AB) = 0{,}7 - 0{,}7 = 0{,}49$.

Пример 9. Пусть у нас перемешаны записи нейронной активности 10 клеток из одной области мозга (у 5 клеток зарегистрирована активность, характерная для клеток «внимания», у 5 — другой вид активности) и 20 из другой области (у 15 — активность типа клеток «внимания», у 5 — другого вида). Выясним, зависимы ли события A — «выбранная наугад запись сделана в первой области» и B — на «выбранной наугад записи зарегистрирована активность, характерная для клеток «внимания». Имеем

$$P(A) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3},\ P(B) = \frac{20}{30} = \frac{2}{3},$$

$$P(AB) = \frac{5}{30} = \frac{1}{6},\ P(AB) \neq P(A)P(B).$$

Следовательно, события A и B зависимы.

Теорема 3. *Если события A_1, A_2, ..., A_n независимы в совокупности, то вероятность наступления хотя бы одного из этих событий (т. е. вероятность суммы) вычисляется по формуле*

$$P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = 1 - P(\bar{A}_1)\,P(\bar{A}_2)\ ...P(\bar{A}_n).$$

Доказательство. Событие $\bar{A}_1\bar{A}_2...\bar{A}_n$ состоит в том, что не произошло ни одно из событий A_i ($i = 1, 2, ..., n$). Оно противоположно событию, состоящему в том, что произошло хотя бы одно из событий A_i, т. е. сумме событий $A_1 + A_2 + ... + A_n$. Поэтому, согласно формуле (2),

$$P(A_1 + A_2 + ... + A_n) + P(\bar{A}_1\bar{A}_2...\bar{A}_n) = 1,$$

откуда

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = 1 - P(\bar{A}_1\bar{A}_2 \ldots \bar{A}_n).$$

Но с учетом замечаний 1 и 2

$$P(\bar{A}_1\bar{A}_2 \ldots \bar{A}_n) = P(\bar{A}_1)\,P\ (\bar{A}_2)\ ...P\ (\bar{A}_n),$$

что и приводит к искомому равенству.

3. Теорема сложения вероятностей совместимых событий. *Вероятность суммы двух совместимых событий A и B равна сумме вероятностей этих событий минус вероятность их произведения:*

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB). \quad (6)$$

Доказательство. Пусть из всего числа n элементарных событий k благоприятствуют событию A, l — событию B и m — одновременно событиям A и B. Отсюда событию $A+B$ благоприятствуют $k+l-m$ элементарных событий. Тогда

$$P\left(A+B\right)=\frac{k+l-m}{n}=\frac{k}{n}+\frac{l}{n}-\frac{m}{n}=P\left(A\right)+P\left(B\right)-P\left(AB\right).$$

Замечание. Если события A и B несовместимы, то их произведение AB есть невозможное событие и, следовательно, $P(AB)=0$, т. е. формула (1) является частным случаем формулы (6).

Пример. В посевах пшеницы на делянке имеется 95% здоровых растений. Выбирают два растения. Определить вероятность того, что среди них хотя бы одно окажется здоровым.

Введем обозначения для событий:

A_1 — первое растение здоровое;

A_2 — второе растение здоровое;

A_1+A_2 — хотя бы одно растение здоровое.

Так как события A_1 и A_2 совместимые, то, согласно формуле (6),

$P(A_1+A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1A_2)=0{,}95+0{,}95-0{,}95\cdot 0{,}95=$ $=0{,}9975\approx 1$.

4. Формула полной вероятности.

Теорема. *Вероятность события A, которое может наступить лишь при условии появления одного из n попарно несовместимых событий B_1, B_2, ..., B_n, образующих полную группу, равна сумме произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующую условную вероятность события A*:

$$P(A)=P(B_1)\,P_{B_1}(A)+P(B_2)\,P_{B_2}(A)+\ldots+P(B_n)P_{Bn}(A) \quad (7)$$

(формула полной вероятности).

Доказательство. Событие A может наступить лишь при условии наступления одного из событий B_1, B_2, ..., B_n, т. е. $A=B_1A+B_2A+\ldots$ $\ldots+B_nA$, причем ввиду несовместимости событий B_1, B_2, ..., B_n события B_1A, B_2A, ..., B_nA также несовместимы.

Поэтому на основании теорем сложения и умножения вероятностей имеем $P(A)=P(B_1A)+P(B_2A)+\ldots+P(B_nA)=P(B_1)\,P_{B_1}(A)+P(B_2)\,P_{B_2}(A)+$ $+\ldots+P(B_n)\,P_{Bn}(A)$.

Пример 1. Для приема зачета преподаватель заготовил 50 задач: 20 задач по дифференциальному исчислению, 30 по интегральному исчислению. Для сдачи зачета студент должен решить первую же доставшуюся наугад задачу. Какова вероятность для студента сдать зачет, если он умеет решить 18 задач по дифференциальному исчислению и 15 задач по интегральному исчислению?

Вероятность получить задачу по дифференциальному исчислению (событие B_1) равна $P(B_1) = 0{,}4$, по интегральному исчислению (событие B_2) – $P(B_2) = 0{,}6$. Если событие A означает, что задача решена, то $P_{B_1}(A) = 0{,}9$, $P_{B_2}(A) = 0{,}5$. Теперь по формуле (7) имеем $P(A) = 0{,}4 \cdot 0{,}9 + 0{,}6 \cdot 0{,}5 = 0{,}36 + 0{,}3 = 0{,}66$.

Пример 2. Имеются три одинаковых по виду ящика. В первом находятся две белые мыши и одна серая, во втором — три белые и одна серая, в третьем — две белые и две серые мыши. Какова вероятность того, что из наугад выбранного ящика будет извлечена белая мышь?

Обозначим:

B_1 — выбор первого ящика;

B_2 — выбор второго ящика;

B_3 — выбор третьего ящика;

A — извлечение белой мыши.

Так как все ящики одинаковы, то $P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = \frac{1}{3}$. Если выбран первый ящик, то $P_{B_1}(A) = \frac{2}{3}$. Аналогично $P_{B_2}(A) = \frac{3}{4}$, $P_{B_3}(A) = \frac{1}{2}$. Наконец, по формуле (7) получаем

$$P(A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{23}{36}.$$

Пример 3. В санатории 30% пациентов — мужчины (M) и 70% — женщины ($Ж$). Сердечные болезни среди мужчин встречаются в 2 раза чаще, чем среди женщин. Какова вероятность, что наугад выбранный пациент сердечник?

Обозначив C — наличие сердечного заболевания, можно написать $P(M) = 0{,}3$, $P(Ж) = 0{,}7$,

$$P_M(C) = \frac{2}{3},\ P_Ж(C) = \frac{1}{3}.$$

Подставляя это в формулу полной вероятности (7), получим

$$P(C) = 0{,}3 \cdot \frac{2}{3} + 0{,}7 \cdot \frac{1}{3} \approx 0{,}2 + 0{,}23 = 0{,}43\ .$$

Задача (смог над городом). На город примерно 100 дней в году дует ветер с севера и 200 дней в году — с запада. Промышленные предприятия, расположенные на севере, производят выброс вредных веществ каждый третий день, а расположенные на западе — в последний день каждой недели. Как часто город подвергается воздействию вредных выбросов? Иными словами, какова вероятность, что в наугад выбранный день город будет накрыт промышленным смогом?

Обозначив C — ветер с севера, $З$ — ветер с запада и B — воздействие вредных выбросов на город, можем написать

$$P(C)=\frac{100}{365}=\frac{20}{73},\ P(З)=\frac{200}{365}=\frac{40}{73},$$

$$P_C(B)=\frac{1}{3},\ P_З(B)=\frac{1}{7}.$$

Отсюда по формуле полной вероятности

$$P(B)=P(C)P_C(B)+P(З)P_З(B)=\frac{20}{73}\cdot\frac{1}{3}+\frac{40}{73}\cdot\frac{1}{7}\approx 0{,}09+0{,}08=0{,}17.$$

Таким образом, примерно два месяца в году город накрыт смогом.

5. Формула Бейеса. Пусть в условиях рассуждения, относящегося к формуле полной вероятности, произведено одно испытание, в результате которого произошло событие A. Спрашивается: как изменились (в связи с тем, что событие A уже произошло) величины $P(B_k)$, $k = 1, \ldots, n$.

Найдем условную вероятность $P_A(B_k)$.

По теореме умножения вероятностей и формуле (4) (см. п. 2) имеем

$$P(AB_k) = P(A)P_A(B_k) = P(B_k)P_{B_k}(A).$$

Отсюда

$$P_A(B_k)=\frac{P(B_k)P_{B_k}(A)}{P(A)}.$$

Наконец, используя формулу полной вероятности, находим

$$P_A(B_k)=\frac{P(B_k)P_{B_k}(A)}{\sum\limits_{j=1}^{n}P(B_j)P_{B_j}(A)}\quad (k=1,2,\ldots n). \tag{8}$$

Формулы (8) называют *формулами Бейеса* (Томас Бейес, или Байес (1702—1761) — английский математик).

Пример 1. Большая популяция людей разбита на две группы одинаковой численности. Диета одной группы отличалась высоким содержанием ненасыщенных жиров, а диета контрольной группы была богата насыщенными жирами. После 10 лет пребывания на этих диетах возникновение сердечно-сосудистых заболеваний составило в этих группах соответственно 31 и 48%. Случайно выбранный из популяции человек имеет сердечно-сосудистое заболевание. Какова вероятность того, что этот человек принадлежит к контрольной группе?

Введем обозначения для событий:

A — случайно выбранный из популяции человек имеет сердечно-сосудистое заболевание;

B_1 — человек придерживался специальной диеты;

B_2 — человек принадлежал к контрольной группе.

Имеем

$P(B_1) = P(B_2) = 0{,}5,$

$P_{B1}(А) = 0{,}31,\ P_{B2}(A) = 0{,}48,$

Согласно формуле полной вероятности,

$$Р\ (А) = 0{,}5 \cdot 0{,}31 + 0{,}5 \cdot 0{,}48 = 0{,}395,$$

и наконец, в силу формулы (8) искомая вероятность

$$P_A\left(B_2\right) = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}48}{0{,}395} = 0{,}61.$$

П р и м е р 2. Известно, что 25% мужчин и 5% женщин — дальтоники. В группе 18 мальчиков и 22 девочки. Какова вероятность, что наугад выбранный ребенок окажется мальчиком-дальтоником?

Обозначим через M и $Д$ события, состоящие в выборе соответственно мальчика и девочки, и через C — наличие у выбранного ребенка дальтонизма. Тогда по условию

$$P\left(M\right) = \frac{18}{40},\ P\left(Д\right) = \frac{22}{40},$$

$P_M(C) = 0{,}25,\ \ P_Д(C) = 0{,}05.$

Отсюда по формуле полной вероятности

$$P\left(C\right) = P\left(M\right)P_M\left(C\right) + P\left(Д\right)P_Д\left(C\right) = \frac{18}{40} \cdot 0{,}25 + \frac{22}{40} \cdot 0{,}05 =$$

$$= \frac{9}{80} + \frac{11}{400} = \frac{56}{400} = \frac{14}{100} = 0{,}14,$$

и по формуле Байеса

$$P_C\left(M\right) = \frac{P\left(M\right)P_M\left(C\right)}{P\left(C\right)} = \frac{18}{40}\frac{1}{4}\frac{100}{14} = \frac{45}{56}.$$

§ 7.3. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЙ В ФИЗИКЕ, ХИМИИ, БИОЛОГИИ И КОДИРОВАНИИ

1. Цепь приборов. Рассмотрим участок электрической цепи, содержащий два последовательно соединенных прибора: A и B (рис. 35).

Предположим, что приборы работают независимо один от другого, и каждый из них может либо пропустить ток (прибор исправен), либо не пропустить (прибор неисправен). Обозначим $P(A)$ и $P(B)$ вероятности исправности приборов A и B соответственно. Для того чтобы по участку цепи прошел ток, нужно, чтобы и прибор A, и прибор B были исправны, т. е. нужно совмещение исправности приборов. Так как приборы работают независимо, то по формуле умножения вероятностей вероятность прохождения тока выразится произведением

$$P = P(A)P(B). \tag{1}$$

Совершенно аналогично для трех последовательно соединенных и независимо работающих приборов $A,\ B,\ C$ (рис. 36) вероятность прохождения тока по участку цепи выразится произведением

$$P=P(A)\cdot P(B)\cdot P(C),$$

а для n приборов $A_1,\ A_2,\ldots,\ A_n$ — произведением

$$P = P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_n).$$

В частности, если приборы однотипны, точнее говоря, если вероятности их исправности равны $P(A_1) = P(A_2) = \ldots = P(A_n) = p,$ то вероятность прохождения тока $P=p^n$.

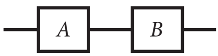


Рис. 35

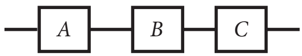


Рис. 36

Можно поставить в некотором смысле обратную задачу. Предположим, что вероятность исправности первого прибора $P(A)$ известна. После испытаний установили вероятность прохождения тока по всему участку P. Тогда из формулы (1) можно найти вероятность исправности второго прибора $P(B)$. Например, если $P(A)=0{,}9$; $P = 0{,}72$, то в силу (1) $P(B) = P/P(A) = 0{,}72/0{,}9 = 0{,}8$.

2. Цепь реакций. Цепной называют химическую реакцию, которая представляет собой цепочку одинаковых звеньев. Звеном может быть одна, две, реже — несколько стадий. Например, звено

$$\acute{R} + O_2 \rightarrow R\acute{O}_2;$$
$$R\acute{O}_2 + RH \rightarrow ROOH \rightarrow \acute{R},$$

начавшись с появлением свободного радикала углеводорода $\acute{R}$, во второй стадии снова выделяет этот радикал и тем самым создает возможность повторения такого же звена.

На некотором этапе цепная реакция может оборваться. Причиной обрыва может служить захват свободного радикала стенкой сосуда, действие ингибитора и т. п. Таким образом, на каждом этапе существует некоторая вероятность p продолжения цепи и вероятность $q = 1 - p$ обрыва цепи.

Какова вероятность, что цепная реакция содержит n звеньев? Для осуществления такой реакции нужно, чтобы n раз произошло продолжение реакции и после этого произошел обрыв. Так как процессы продолжения и обрыва независимы, то по формуле умножения вероятностей для $P(n)$ — вероятности появления цепи длины n — можем написать

$$P(n) = \underbrace{p\cdot p\ldots p}_{n\ \text{раз}}q = p^n q = p^n(1-p).$$

3. Молекула полимера. Процесс полимеризации состоит в том, что к звену-мономеру присоединяется такой же мономер, к этому звену —

еще один такой же мономер и т. д. Присоединение происходит с некоторой вероятностью p и, следовательно, не происходит с вероятностью $q = 1 - p$. Так как каждое следующее присоединение происходит независимо от предыдущих, то вероятность образования молекулы, содержащей n мономеров, вычисляется по предыдущей формуле

$$P(n) = \underbrace{p \cdot p \ldots p}_{n \text{ раз}} q = p^n q = p^n (1 - p).$$

4. Параллельное соединение приборов. Рассмотрим участок цепи, содержащий два прибора A и B, соединенных параллельно (рис. 37). Предположим, что приборы работают независимо и $P(A)$ — вероятность прохождения сигнала по прибору A, а $P(B)$ — по прибору B. Например, сигнал проходит по прибору, если прибор исправлен, и не проходит — в противном случае. Очевидно, сигнал пройдет, если будет исправен хотя бы один прибор. Таким образом, вероятность прохождения сигнала по участку цепи — это вероятность $P(A + B)$, где сумма $A + B$ означает исправную работу хотя бы одного из приборов. Так как приборы работают независимо, то эту вероятность можно вычислить по формуле

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B). \qquad (2)$$

Например, если $P(A) = 0{,}8$, $P(B) = 0{,}9$, то

$$P(A + B) = 0{,}8 + 0{,}9 - 0{,}8 \cdot 0{,}9 = 0{,}98. \qquad (3)$$

Можно поставить и обратную задачу. Предположим, что один из приборов — эталонный и вероятность его безотказной работы (т. е. вероятность прохождения по нему сигнала) известна. После испытаний установили вероятность прохождения сигнала по всему участку. Тогда из формулы (2) можно найти вероятность безотказной работы второго прибора. Например, если $P(A) = 0{,}8$, $P(A + B) = 0{,}95$, то, подставив это в (2), будем иметь

$$0{,}95 = 0{,}8 + P(B) - 0{,}8 \cdot P(B).$$

Отсюда

$$P(B) = \frac{0{,}15}{0{,}2} = 0{,}75\,.$$

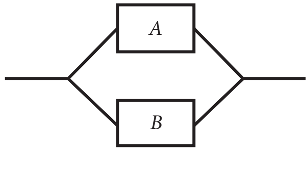


Рис. 37

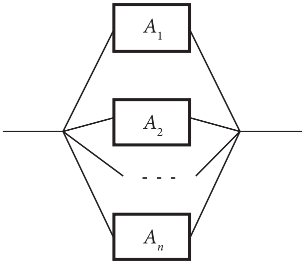


Рис. 38

Из формулы (3) видно, что параллельное соединение увеличило вероятность прохождения сигнала. Второй прибор подстраховывает, дублирует первый. Можно ожидать, что параллельное соединение трех и более приборов еще более увеличит эту вероятность.

Если участок цепи состоит из n независимо работающих приборов, соединенных параллельно (рис. 38), и A_1 означает, что сигнал прошел по i-му прибору, т. е. что i-й прибор исправен, то вероятность прохождения сигнала по участку — это вероятность исправной работы хотя бы одного прибора, т. е. вероятность суммы $A_1 + A_2 + \ldots + A_n$. Следовательно (см. § 7.2, теорема 3),

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = 1 - P(\bar{A}_1)\, P(\bar{A}_2) \ldots P(\bar{A}_n). \tag{4}$$

Так как $P(\bar{A}_i) = 1 - P(A_i) < 1$, то при большом n произведение $P(\bar{A}_1) \times \times P(\bar{A}_2) \ldots P(\bar{A}_n)$ достаточно мало и, следовательно, вероятность $P(A_1 + A_2 + + \ldots + A_n)$ близка к единице.

В частности, если все вероятности равны $P(A_1) = P(A_2) = \ldots = P(A_n) = p$, то $P(\bar{A}_i) = 1 - P(A_i) = 1 - p = q$ и из формулы (4) получаем

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = 1 - q^n. \tag{5}$$

Из формулы (5) видно, что даже при малой вероятности p, т. е. при q, близкой к единице, выбирая достаточно большее n, можно сделать вероятность $P(A_1 + \ldots + A_n)$ достаточно близкой к единице.

Вместо схемы с параллельно соединенными приборами можно рассмотреть систему химических реакций и т. п.

5. Последовательные и параллельные соединения приборов. В предыдущих пунктах рассмотрели порознь последовательные и параллельные соединения приборов и установили, как вычисляется вероятность прохождения сигнала по участку схемы в том и другом случае. На практике приходится иметь дело с различными сочетаниями соединений обоих типов. Рассмотрим два характерных примера.

Предположим, что сигнал проходит по участку схемы, состоящему из двух параллельных блоков A и B, первый из которых состоит из одного прибора A, а второй содержит два последовательно соединенных прибора B_1 и B_2 (рис. 39, a). Пусть возможность отказа одного из приборов не зависит от работы остальных. Сигнал проходит, если хотя бы один из блоков исправен, а каждый из блоков выходит из строя, если хотя бы один из его приборов отказал.

Обозначим $P(A)$, $P(B_1)$ и $P(B_2)$ — вероятности безотказной работы соответствующих приборов; $P(B)$ — вероятность исправности блока B (вероятность исправности блока A, очевидно, равна $P(A)$); $P(A+B)$ — вероятность прохождения сигнала по цепи. Тогда, используя формулы сложения и умножения, можем написать

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) = P(A) + P(B_1) \cdot P(B_2) - P(A) \cdot P(B_1) \cdot P(B_2). \quad (6)$$

На практике чаще задается не вероятность безотказной работы, а вероятность отказа, т. е. $P(\bar{A})$, $P(\bar{B}_1)$, $P(\bar{B}_2)$ и т. п. Так как отказ и безотказная работа — взаимно противоположные события, то $P(A) = 1 - P(\bar{A})$; $P(B_1) = 1 - P(\bar{B}_1)$; $P(B_2) = 1 - P(\bar{B}_2)$ и мы снова можем применить формулу (6).

Например, если $P(\bar{A}) = 0{,}1$; $P(\bar{B}_1) = 0{,}07$; $P(\bar{B}_2) = 0{,}08$, то $P(A) = 0{,}9$; $P(B_1) = 0{,}93$; $P(B_2) = 0{,}92$. Поэтому $P(A + B) = 0{,}9 + 0{,}93 \times 0{,}92 - 0{,}9 \times$ $\times\, 0{,}93 \cdot 0{,}92 = 0{,}986$.

Теперь предположим, что участок схемы состоит из двух последовательно соединенных блоков A и B, один из которых состоит из одного прибора A, а другой содержит два параллельно соединенных прибора B_1 и B_2 (рис. 39, *б*). Пусть по-прежнему приборы работают независимо. Блок B выходит из строя, если отказали оба его прибора. Сигнал проходит, если оба блока A *и* B исправны. Обозначив $P(AB)$ — вероятность прохождения сигнала по цепи и сохранив остальные обозначения для вероятностей, можем написать $P(AB) = P(A)P(B) = P(A)[P(B_1) + P(B_2) - P(B_1) \cdot P(B_2)]$. В частности, для данных предыдущего примера

$$P(AB) = 0{,}9\,(0{,}93 + 0{,}92 - 0{,}93 \cdot 0{,}92) = 0{,}895.$$

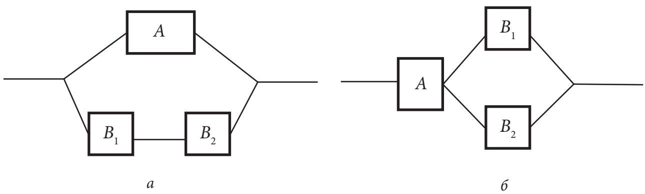


Рис. 39

Аналогично рассматриваются случаи, когда блок A состоит из двух или большего числа приборов, соединенных параллельно или последовательно, когда блоков более чем два и т. п.

Разумеется, и в этом случае вместо приборов могут быть рассмотрены химические реакции.

6. Законы Менделя. Известно, что в простейших случаях передача некоторого признака по наследству зависит от определенного гена. В половых клетках гены, отвечающие за некоторый признак, находятся парами. Например, в клетках гороха имеется пара генов, отвечающих за цвет цветков потомства — красный или белый. Эти гены могут находиться в двух состояниях — доминантном (оно обозначается буквой *A)* и рецессивном (оно обозначается буквой *a*). Поэтому пары генов могут быть такими:

AA, *Aa (или aA), aa*.

Выписанные возможности определяют генотипы данной особи: первый — доминантный, второй — смешанный, третий — рецессивный. Оказывается, что наследование признака зависит от генотипа особи. Например, для гороха красный цвет цветков — доминантный признак, а белый — рецессивный.

Из опытов известен I *закон Менделя*: особи доминантного и смешанного генотипов в фенотипе[1] обладают доминантным признаком, и только особи рецессивного генотипа в фенотипе обладают рецессивным признаком.

Согласно этому закону, для гороха особи доминантного и смешанного генотипов имеют красный цвет цветков и только особи с рецессивным генотипом имеют цвет цветков белый.

Пусть имеется популяция чистых линий с генотипами *AA и aa* — поколение F_0 (родительские формы).

После скрещивания особей с генотипом *AA* с особями с генотипом *aa* поколения F_0 образуется поколение гибридов с генотипом *Aa.* Это поколение в генетике принято обозначать F_1. В поколении F_1 других генотипов, кроме генотипа *Aa,* нет.

При случайном скрещивании особей поколения F_1 образуется поколение F_2, в котором одинаково часто встречаются 4 генотипа:

AA, *Aa*, *aA*, *aa*.

Из опытов известен II *закон Менделя*: в поколении F_2 происходит расщепление фенотипов в отношении 3:1 (3 части составляют особи с доминантным признаком в фенотипе, 1 часть приходится на особи с рецессивным признаком в фенотипе).

Из этого закона следует, что для поколения F_2 вероятность того, что в фенотипе особи проявляется доминантный признак, равна 3/4, а вероятность того, что в фенотипе особи проявится рецессивный признак, равна $\frac{1}{4}$

7. Закон Харди. Пусть в популяции встречаются три генотипа: *AA, Aa, aa.* Доля особей генотипа *AA* равна u, доля особей генотипа *Aa* равна $2v$ и доля особей генотипа *aa* равна w. Коротко будем говорить о структуре популяции и записывать ее так:

[1] *Фенотип* — внешнее проявление признака.

$$\begin{array}{ccc} AA & Aa & aa \\ u & 2\upsilon & w \end{array} \qquad (7)$$

Под этим мы понимаем следующее: если популяция содержит N особей, то особей генотипа AA в ней uN, особей смешанного генотипа Aa в ней $2vN$ и особей рецессивного генотипа aa в ней wN. При этом, так как

$$uN + 2\upsilon N + wN = N,$$

то

$$u + 2v + w = 1. \qquad (8)$$

Подсчитаем число генов A в популяции. Все особи доминантного генотипа имеют $2uN$ генов A (у каждой особи два гена A, и всех особей uN), особи смешанного генотипа имеют $2\upsilon N$ генов A (у каждой особи один ген A, и всех особей $2vN$), у особей рецессивного генотипа генов A нет. Следовательно, в популяции (7) число доминантных генов A равно

$$2uN + 2vN = 2N\,(u + v),$$

или, короче,

$$2Np,$$

где

$$p = u + v \qquad (9)$$

Число p имеет простой вероятностный смысл — это есть $P(A)$, т. е. вероятность того, что выбранный наудачу ген доминантен. Действительно, доминантных генов $2Np$, и всех генов $2N$ (у каждой особи популяции два гена). Следовательно,

$$P\left(A\right) = \frac{2Np}{2N} = p. \qquad (10)$$

Аналогично подсчитывается, что число всех рецессивных генов a в популяции (7) равно

$$2Nq,$$

где

$$q = w + v. \qquad (11)$$

При этом число q имеет аналогичный вероятностный смысл:

$$P\left(a\right) = \frac{2Nq}{2N} = q. \qquad (12)$$

Из вероятностного смысла чисел p и q, а также из формул (9), (11) и (8) следует, что

$$p + q = 1. \qquad (13)$$

Заметим, что числа u, 2υ и w в (7) тоже имеют простой вероятностный смысл (подсчет аналогичен проведенному выше подсчету для доминантных генов):

$$P\left(AA\right)=\tfrac{uN}{N}=u, \tag{14}$$

$$P\left(Aa\right)=\tfrac{2\upsilon N}{N}=2\upsilon, \tag{15}$$

$$P\left(aa\right)=\tfrac{wN}{N}=w. \tag{16}$$

($P(AA)$ — вероятность того, что выбранная наудачу особь имеет генотип AA, аналогично $P(Aa)$ и $P(aa)$.)

Теперь посмотрим, какова будет структура потомства. Пусть потомство имеет структуру

$$\begin{matrix} AA & Aa & aa \\ u_1 & 2\upsilon_1 & w_1 \end{matrix} \tag{17}$$

(это понимается так же, как и (7)). Подсчитаем u_1, $2v_1$ и w_1.

Числа u_1, $2\upsilon_1$ и w_1 есть вероятности того, что взятый наудачу потомок имеет соответственно генотип AA, Aa и aa (см. соответственно формулы (14), (15), (16)). Так как скрещивания происходят независимым образом, то вероятность u_1 может рассматриваться как вероятность следующего события: выбрали наудачу и независимым образом из всего запаса два гена A. Так как выбрать каждый ген A можно с вероятностью p (формула (10)), то в силу теоремы умножения вероятностей независимых событий (см. § 7.2, п. 2) интересующая нас вероятность равна p^2, т. е.

$$u_1 = p^2. \tag{18}$$

Аналогично с использованием формулы (12) получаем

$$w_1 = q^2. \tag{19}$$

Вероятность генотипа Aa в популяции потомков складывается из двух возможностей — либо ген A получен от отца, а ген a от матери, либо ген A получен от матери, а ген a от отца — соответствующие вероятности есть pq и qp. Следовательно, вероятность генотипа Aa в популяции потомков равна $2pq$, т. е. $2v_1 = 2pq$. Отсюда

$$v_1 = pq. \tag{20}$$

Следовательно, потомство (17) имеет следующую структуру:

$$\begin{matrix} AA & Aa & aa \\ p^2 & 2pq & q^2 \end{matrix}. \tag{21}$$

Самое замечательное состоит в том, что если для потомства взять $u_1 + v_1$ и $w_1 + \upsilon_1$, как это делалось для родителей в формулах (9) и (11), то получим те же самые числа p и q. Действительно, согласно формулам (18), (20), (19) и (13), имеем

$$u_1 + v_1 = p^2 + pq = p(p + q) = p,$$
$$w_1 + v_1 = q^2 + pq = q(q + p) = q.$$

Так как структура (21) потомства вычислена только с использованием этих сумм, то потомки популяции со структурой (21) будут иметь ту же структуру. При этом говорят, что структура (21) стационарна, т. е. от поколения к поколению не меняется.

Этот замечательный факт, что со второго поколения устанавливается стационарная структура популяции, является непосредственным обобщением второго закона Менделя и называется *законом Харди*.

На практике возможно отклонение, однако для больших популяций закон Харди остается в силе.

Для гороха вероятность получения белой особи равна q^2 (рецессивный признак), вероятность получения красной особи равна $1 - q^2$ (как для противоположного события) и отношение числа красных и белых особей равно $(1 - q^2)$: q^2.

Для описанного в п. 6 случая $q = \frac{1}{2}$, и опять получаем 3 : 1 (см. II закон Менделя).

8. Код Фано. Все хорошо знают, что коды, или шифры, используют для передачи секретной информации. Менее известно, однако, что в наше время коды приобрели и иное значение, быть может, более обыденное, но зато куда более важное и широкое. В этой их новой роли коды и кодирование — прежде всего средство для экономной, удобной и практически безошибочной передачи сообщений. Новые применения кодов сложились в результате бурного развития различных средств связи, неизмеримо возросшего объема передаваемой информации. Ниже остановимся на одном из кодов — коде Фано (см. например, [2])

Представим себе, что одни сообщения приходится передавать довольно часто, другие — редко, третьи — совсем в исключительных случаях. Понятно, что первые лучше закодировать тогда короткими словами, оставив более длинные слова для кодирования сообщений, появляющихся реже. В результате кодовый текст станет в среднем короче, и на его передачу потребуется меньше времени.

Впервые эта простая идея была реализована американским инженером Морзе в предложенном им коде. Рассказывают, что, создавая свой код, Морзе отправился в ближайшую типографию и подсчитал число литер в наборных кассах. Буквам и знакам, для которых литер в этих кассах было припасено больше, он сопоставил более короткие кодовые обозначения (ведь эти буквы встречаются чаще). Так, например, в русском варианте азбуки Морзе буква «е» передается одной точкой, а редко встречающаяся буква «ц» — набором из четырех символов.

Мерой частоты появления того или иного события является его вероятность. Вероятность некоторого события (сообщения) можно представлять себе как долю тех случаев, в которых оно появляется, от общего числа появившихся событий (сообщений).

Так, если заданы четыре сообщения A_1, A_2, A_3, A_4 с вероятностями $P(A_1)= 1/2$, $P(A_2) = 1/4$, $P(A_3) = P(A_4)= 1/8$, то это означает, что среди, например, 1000 переданных сообщений около 500 раз появляется сообщение A_1, около 250 — сообщение A_2 и примерно по 125 раз — каждое из сообщений A_3 и A_4.

Разобьем сообщения на две равновероятные группы: в первую попадает сообщение A_1, во вторую — сообщения A_2, A_3, A_4. Сопоставим первой группе символ 0, второй — символ 1 (см. таблицу 28; во второй графе таблицы указаны вероятности сообщений).

Таблица 28

<table>
<tr><td>A_1</td><td>1/2</td><td>0</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>A_2</td><td>1/4</td><td rowspan="3">1</td><td>0</td><td></td></tr>
<tr><td>A_3</td><td>1/8</td><td rowspan="2">1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>A_4</td><td>1/8</td><td>1</td></tr>
</table>

Символ 0 соответствует ответу «да» на вопрос «принадлежит ли сообщение первой группе?», а 1 — ответу «нет». Продолжая в том же духе, разобьем множество сообщений A_2, A_3, A_4 снова на две равновероятные группы. Первой, состоящей из одного сообщения A_2, сопоставим символ 0, а второй, в которую входят сообщения A_3 и A_4,— символ 1. Наконец, оставшуюся группу из двух сообщений разобьем на две группы, содержащие соответственно сообщения A_3 и A_4, сопоставив первой из них 0, а второй — символ 1. Сообщение A_1 образовало «самостоятельную» группу на первом шаге, ему был сопоставлен символ 0, слово 0 и будем считать кодом этого сообщения. Сообщение A_2 образовало самостоятельную группу за два шага, на первом шаге ему сопоставлялся символ 1, на втором — 0; поэтому будем кодировать сообщение A_2 словом 10. Аналогично, для A_3 и A_4 выбираем соответственно коды 110 и 111. В итоге получается следующая кодовая таблица (таблица 29):

Таблица 29

A_1	A_2	A_3	A_4
0	10	110	111

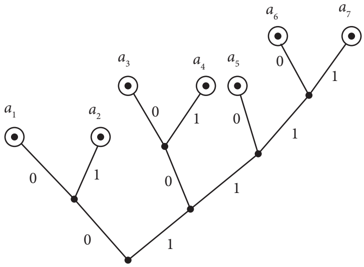


Рис. 40

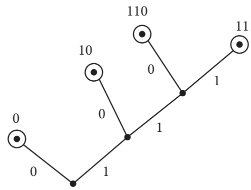


Рис. 41

Указанный здесь способ кодирования был предложен американским математиком Фано.

Алгоритм кодирования Фано имеет очень простую графическую иллюстрацию в виде множества точек (вершин) на плоскости, соединенных отрезками (ребрами) по определенному правилу, т.е. в виде *графа* (см. § 4.1). Граф для кода Фано строится следующим образом (рис. 40)· Из нижней (корневой) вершины графа исходят два ребра, одно из которых помечено символом 0, другое — символом 1. Эти два ребра соответствуют разбиению множества сообщений на две равновероятные группы, одной из которых сопоставляется символ 0, а другой — символ 1. Ребра, исходящие из вершин следующего «этажа», соответствуют разбиению получившихся групп снова на равновероятные подгруппы и т. д. Построение графа заканчивается, когда множество сообщений будет разбито на одноэлементные подмножества. Каждая концевая вершина графа, т.е. вершина, из которой уже не исходят ребра, соответствует некоторому кодовому слову. Чтобы указать это слово, надо пройти путь от корневой вершины до соответствующей концевой, выписывая в порядке следования по этому пути символы проходимых ребер. Например, вершине a_3 на рис. 40 соответствует слово 100, а вершине a_6 — слово 1110 (вершины, соответствующие кодовым словам, помечены на рисунке кружками).

Граф для рассмотренного выше примера представлен на рис. 41.

Получающиеся для кодов Фано графы всегда обладают тем свойством, что они не содержат замкнутых контуров. Такие графы (см. § 4.3) называют *деревьями* (будем называть их, учитывая происхождение, *кодовыми деревьями)*. Кодовые деревья можно строить не только для кодов Фано, но и для других кодов. Независимо от алгоритма кодирования каждому дереву соответствует определенное множество кодовых слов. Например, для кодового дерева, изображенного на рис. 40 имеем:

$$a_1 = 00,\ a_2 = 01,\ a_3 = 100,\ a_4 = 101,\ a_5 = 110,\ a_6 = 1110,\ a_7 = 1111.$$

§ 7.4. ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

1. Понятие «случайные величины».

Определение 1. *Случайной величиной* называют переменную величину, которая в зависимости от исхода испытания случайно принимает одно значение из множества возможных значений.

Примеры: 1) число очков, выпавших при однократном бросании игральной кости, есть случайная величина, она может принять одно из значений: 1, 2, 3, 4, 5, 6;

2) прирост веса домашнего животного за месяц есть случайная величина, которая может принять значение из некоторого числового промежутка;

3) число родившихся мальчиков среди пяти новорожденных есть случайная величина, которая может принять значения 0, 1, 2, 3, 4, 5.

Случайные величины будем обозначать прописными буквами X, Y, Z, а их возможные значения — соответствующими строчными буквами x, y, z. Например, если случайная величина X имеет три возможных значения, то они будут обозначены так:

$$x_1, x_2, x_3.$$

Определение 2. Случайная величина, принимающая конечное, или счетное, множество значений[1], называется *дискретной* случайной величиной.

Ниже рассматриваются дискретные случайные величины, множество допустимых значений которых конечно.

Случайные величины из примеров 1) и 3) дискретные.

Определение 3. Случайная величина, которая может принимать все значения из некоторого числового промежутка, называется *непрерывной* случайной величиной.

Случайная величина из примера 2) является непрерывной.

2. Законы распределения дискретных случайных величин. Рассмотрим дискретную случайную величину X с конечным множеством возможных значений. Величина X считается заданной, если перечислены все ее возможные значения, а также вероятности, с которыми величина X может принять эти значения. Указанный перечень возможных значений и их вероятностей называют *законом распределения* дискретной случайной величины. Закон распределения дискретной случайной величины может быть задан с помощью таблицы:

X	x_1	x_2	x_3	...	x_{n-1}	x_n
p	p_1	p_2	p_3	...	p_{n-1}	p_n

[1] Множество называется счетным, если его элементы можно пронумеровать натуральными числами.

В верхней строке выписывают все возможные значения $x_1, x_2, ..., x_n$ величины X, в нижней строке выписывают вероятности $p_1, p_2, ..., p_n$ значений $x_1, x_2, ..., x_n$. Читается таблица следующим образом: случайная величина X может принять значение x_i с вероятностью p_i ($i = 1, 2, ..., n$).

Так как в результате испытания величина X всегда примет одно из значений $x_1, x_2, ..., x_n$, то

$p_1 + p_2 + ... + p_n = 1.$

Пример. В денежной лотерее разыгрывается 1 выигрыш в 100000 р., 10 выигрышей по 10000 р. и 100 выигрышей по 100 р. при общем числе билетов 10000. Найти закон распределения случайного выигрыша X для владельца одного лотерейного билета.

Здесь возможные значения для X есть: $x_1 = 0$, $x_2 = 100$, $x_3 = 10000$, $x_4 = 100000$. Вероятности их будут: $p_2 = 0{,}01$, $p_3 = 0{,}001$, $p_4 = 0{,}0001$, $p_i = 1 – 0{,}01 – 0{,}001 – 0{,}0001 = 0{,}9889$. Следовательно, закон распределения выигрыша X может быть задан таблицей:

X	0	100	10000	100000
p	0,9889	0,01	0,001	0,0001

§ 7.5. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ ДИСКРЕТНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

1. Понятие математического ожидания. Закон распределения полностью задает дискретную случайную величину. Однако часто встречаются случаи, когда закон распределения случайной величины неизвестен. В таких случаях случайную величину изучают по ее числовым характеристикам. Одной из таких характеристик является *математическое ожидание.*

Пусть некоторая дискретная случайная величина X с конечным числом своих значений задана законом распределения:

X	x_1	x_2	...	x_n
p	p_1	p_2	...	p_n

Определение. Математическим ожиданием $M(X)$ дискретной случайной величины X называют сумму произведений всех возможных значений величины X на соответствующие вероятности:

$$M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n. \qquad (1)$$

Пример. Найти математическое ожидание выигрыша X в примере из § 7.4 (пункт 2).

Используя полученную там таблицу, имеем

$M(X) = 0 \cdot 0{,}9889 + 100 \cdot 0{,}01 + 10\,000 \cdot 0{,}001 + 100\,000 \cdot 0{,}0001 =$
$= 1 + 10 + 10 = 21$р.

Очевидно, $M(X) = 21$ р. есть справедливая цена одного лотерейного билета.

Теорема. *Математическое ожидание дискретной случайной величины X приближенно равно среднему арифметическому всех ее значений (при достаточно большом числе испытаний).*

Доказательство. Предположим, что произведено n испытаний, в которых дискретная случайная величина X приняла значения $x_1, ..., x_k$ соответственно $m_1, ..., m_k$ раз, так, что $m_1 + ...+ m_k = n$. Тогда среднее арифметическое всех значений, принятых величиной X, выразится равенством

$$x_{ср.} = \frac{x_1m_1+x_2m_2+...+x_km_k}{n}.$$

или

$$x_{ср.} = x_1\frac{m_1}{n} + x_2\frac{m_2}{n} + ... + x_k\frac{m_k}{n_k}.$$

Так как коэффициент $\frac{m_i}{n}$ является относительной частотой события «величина X приняла значение x_i» ($i = 1, 2,..., k$), то

$$x_{ср.} = x_1p_1^* + xp_2^* + ...+ x_kp_k^*.$$

Из статистического определения вероятности следует, что при достаточно большом числе испытаний $p_i^* \approx p_i$ ($i = 1, 2, ..., k$). Поэтому

$$x_{ср.} = x_1p + xp_2 + ...+ x_kp_k.$$

или

$$x_{ср.} \approx M(X).$$

Примечание. В связи с только что установленной теоремой математическое ожидание случайной величины называют также ее *средним значением*, или *ожидаемым значением.*

2. Свойства математического ожидания дискретной случайной величины.

1. *Математическое ожидание постоянной величины C равно этой величине.*

Постоянную C можно рассматривать как дискретную случайную величину, принимающую лишь одно значение C с вероятностью $p = 1$. Поэтому $M(C) = C\cdot 1 = C$.

2. *Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания, т. е. $M(CX) = CM(X)$.*

Используя соотношение (1) имеем

$$M(CX) = Cx_1p_1Cx_2p_2 + \ldots + Cx_np_n = C(x_1p_1 + x_2p_2 +\ldots + x_np_n) = CM(X).$$

Следующие два свойства (3 и 4) примем без доказательства.

3. Математическое ожидание суммы двух случайных величин X и Y равно сумме их математических ожиданий.

$$M(X + Y) = M(X) + M(Y).$$

Определение. Случайные величины X и Y называют *независимыми,* если закон распределения каждой из них не зависит от того, какое возможное значение приняла другая величина.

Примером двух независимых величин могут служить суммы выигрышей по каждому из двух билетов по двум различным денежно-вещевым лотереям. Здесь ставший известным размер выигрыша по билету одной лотереи не влияет на ожидаемый размер выигрыша и соответствующую ему вероятность по билету другой лотереи.

Несколько случайных величин называют независимыми, если закон распределения любой из них не зависит от того, какие возможные значения приняли остальные случайные величины.

4. *Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий:*

$$M(XY) = M(X)M(Y).$$

Следствием свойств 2 и 3 является свойство 5.

5. Математическое ожидание разности двух случайных величин X и Y равно разности их математических ожиданий:

$$M(X - Y) = M(X) - M(Y).$$

Примечание 1. Свойства 3 и 4 имеют место и для любого конечного числа случайных величин.

Примечание 2. Если множество возможных значений дискретной случайной величины X бесконечно, то математическое ожидание $M(X)$ определяется суммой числового ряда $M(X)=\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ при условии, что этот ряд абсолютно сходится (в противном случае говорят, что математическое ожидание $M(X)$ не существует). Перечисленные свойства математического ожидания остаются в силе (см. [7]) и для таких случайных величин.

Пример 1. Найти математическое ожидание случайной величины $Z = X + 2Y$, если известны математические ожидания случайных величин X и Y: $M(X) = 5$, $M(Y) = 3$.

Используя свойства 3 и 2 математического ожидания, получаем

$$M(Z) = M(X + 2Y) = M(X) + M(2Y) = M(X) + 2M(Y) = 5 + 2 \cdot 3=11.$$

Пример 2. Независимые случайные величины заданы законами распределения

X	1	2
p	0,2	0,8

X	0,5	1
p	0,3	0,7

Найдите математическое ожидание случайной величины XY. Найдем математические ожидания каждой из данных величин:

$$M(X) = 1 \cdot 0{,}2 + 2 \cdot 0{,}8 = 1{,}8,$$
$$M(Y) = 0{,}5 \cdot 0{,}3 + 1 \cdot 0{,}7 = 0{,}15 + 0{,}7 = 0{,}85.$$

Случайные величины X и Y независимы, поэтому искомое математическое ожидание

$$M(XY) = M(X) \cdot M(Y) = 1{,}8 \cdot 0{,}85 = 1{,}53.$$

§ 7.6. ДИСПЕРСИЯ ДИСКРЕТНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

1. Понятие дисперсии. Математическое ожидание не дает полной характеристики закона распределения случайной величины. Покажем это на примере. Пусть заданы две дискретные случайные величины X и Y своими законами распределения:

X	-2	0	2
p	0,4	0,2	0,4

Y	-100	0	100
p	0,3	0,4	0,3

Несмотря на то что математические ожидания величин X и Y одинаковы: $M(X) = M(Y) = 0$, возможные значения величин X и Y «разбросаны» или «рассеяны» около своих математических ожиданий по-разному: возможные значения величины X расположены гораздо ближе к своему математическому ожиданию, чем значения величины Y.

Укажем еще на один пример. При одинаковой средней величине годовых осадков одна местность может быть засушливой и неблагоприятной для сельскохозяйственных работ (нет дождей весной и летом), а другая благоприятной для ведения сельского хозяйства.

Из сказанного вытекает необходимость введения новой числовой характеристики случайной величины, по которой можно судить о «рассеянии» возможных значений этой случайной величины.

Пусть задана дискретная случайная величина X:

X	x_1	x_2	...	x_n
p	p_1	p_2	...	p_n

Определение 1. *Отклонением* случайной величины X от ее математического ожидания $M(X)$ (или просто отклонением случайной величины X) называют случайную величину $X - M(X)$.

Видно, что, для того чтобы отклонение случайной величины X приняло значение $x_1 - M(X)$, достаточно, чтобы случайная величина X приняла значение x_1. Вероятность же этого события равна p_1; следовательно, и вероятность того, что отклонение случайной величины X примет значение $x_1 - M(X)$, также равна p_1. Аналогично обстоит дело и для остальных возможных значений отклонения случайной величины X. Используя это, запишем закон распределения отклонения случайной величины X:

$X - M(X)$	$x_1 - M(X)$	$x_2 - M(X)$	...	$x_n - M(X)$
p	p_1	p_2		p_n

Вычислим теперь математическое ожидание отклонения $X - M(X)$. Пользуясь свойствами 5 и 1 (§ 7.5, п. 2), получаем

$$M[X - M(X)] = M(X) - M(X) = 0.$$

Следовательно, справедлива следующая теорема.

Теорема. *Математическое ожидание отклонения $X - M(X)$ равно нулю:*

$$M[X - M(X)] = 0.$$

Из теоремы видно, что с помощью отклонения $X - M(X)$ не удается определить среднее отклонение возможных значений величины X от ее математического ожидания, т. е. степень рассеяния величины X. Это объясняется взаимным погашением положительных и отрицательных возможных значений отклонения. Однако можно освободиться от этого недостатка, если рассматривать квадрат отклонения случайной величины X. Запишем закон распределения случайной величины $[X - M(X)]^2$ (рассуждения те же, что и в случае случайной величины $X - M(X)$).

$[X - M(X)]^2$	$[x_1 - M(X)]^2$	$[x_2 - M(X)]^2$	...	$[x_n - M(X)]^2$
p	p_1	p_2	...	p_n

Определение 2. *Дисперсией* $D(X)$ дискретной случайной величины X называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины X от ее математического ожидания:

$$D(X) = M[(X - M(X))^2].$$

Из закона распределения величины $[X - M(X)]^2$ следует, что

$$D(X) = [x_1 - M(X)]^2 p_1 + [x_2 - M(X)]^2 p_2 + \ldots + [x_n - M(X)]^2 p_n.$$

2. Свойства дисперсии дискретной случайной величины.

1. *Дисперсия дискретной случайной величины X равна разности между математическим ожиданием квадрата величины X и квадратом ее математического ожидания:*

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X).$$

Действительно, используя свойства математического ожидания, имеем

$$D(X) = M[(X - M(X))^2] = M[X^2 - 2XM(X) + M^2(X)] = M(X^2) - 2M(X)M(X) + \\ + M^2(X) = M(X^2) - 2M^2(X) + M^2(X) = M(X^2) - M^2(X).$$

С помощью этого свойства и свойств математического ожидания устанавливаются следующие свойства.

2. *Дисперсия постоянной величины C равна нулю.*

3. *Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат:*

$$D(CX) = C^2D(X).$$

4. *Дисперсия суммы двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин*:

$$D(X+Y) = D(X)+D(Y).$$

Это свойство распространяется и на случай любого конечного числа слагаемых.

Следствием свойств 3 и 4 является свойство 5.

5. *Дисперсия разности двух независимых случайных величин X и Y равна сумме их дисперсий:*

$$D(X - Y)=D(X)+D(Y).$$

Пример. Дисперсия случайной величины X равна 3. Найдите дисперсию следующих величин: а) $-3X$; б) $4X + 3$.

Согласно свойствам 2, 3 и 4 дисперсии, имеем:

а) $D(-3X)= 9D(X) = 9 \cdot 3 = 27$;

б) $D(4X + 3) = D(4X)+D(3) = 16D(X) + 0 = 16 \cdot 3 = 48$.

Примечание. Если множество возможных значений дискретной случайной величины X бесконечно, то ее дисперсия определяется суммой сходящегося числового ряда

$$D(X)=\sum_{k=1}^{\infty}\left[x_k - M(X)\right]^2 p_k.$$

3. Среднее квадратическое отклонение.

Определение. *Средним квадратическим отклонением* $\sigma(X)$ случайной величины X называется корень квадратный из ее дисперсии:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}.$$

Введение среднего квадратического отклонения объясняется тем, что дисперсия измеряется в квадратных единицах относительно размерности самой случайной величины. Например, если возможные значения некоторой случайной величины измеряются в метрах, то ее дисперсия измеряется в квадратных метрах. В тех случаях, когда нужно иметь числовую характеристику рассеяния возможных значений в той же размерности, что и сама случайная величина, используется среднее квадратическое отклонение.

Пример. Случайная величина X — число очков, выпавших при однократном бросании игральной кости. Определить $\sigma(X)$. Имеем

$$M\left(X\right)=1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{6}+4\cdot\frac{1}{6}+5\cdot\frac{1}{6}+6\cdot\frac{1}{6}=3{,}5;$$

$$D\left(X\right)=\left(1-3{,}5\right)^2\cdot\frac{1}{6}+\left(2-3{,}5\right)^2\cdot\frac{1}{6}+\left(3-3{,}5\right)^2\cdot\frac{1}{6}+\left(4-3{,}5\right)^2\cdot\frac{1}{6}+$$
$$+\left(5-3{,}5\right)^2\cdot\frac{1}{6}+\left(6-3{,}5\right)^2\cdot\frac{1}{6}=\frac{35}{12};$$

$$\sigma\left(X\right)\sqrt{\frac{35}{12}}\approx 1{,}71.$$

Здесь для облегчения вычислений можно использовать калькулятор. То же следует иметь в виду и в ряде других примеров этой главы.

4. Понятие о моментах распределения.

Определение 1. *Начальным моментом порядка k* случайной величины X называют математическое ожидание случайной величины X^k, где k — натуральное число:

$$\upsilon_k = M(X^k).$$

Следовательно, если X имеет распределение

X	x_1	x_2	...	x_n
p	p_1	p_2	...	p_n

то

$$\upsilon_{\mathrm{k}} = x_1{}^k p_1 + x_2{}^k p_2 + \ldots + x_n{}^k p_n.$$

Математическое ожидание и дисперсию случайной величины X можно выразить через начальные моменты порядков 1 и 2:

$$M(X)= \upsilon_1,$$
$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = \upsilon_2 - \upsilon_1{}^2. \qquad (1)$$

Определение 2. *Центральным моментом порядка k* случайной величины X называется математическое ожидание величины $[X - M(X)]^k$:

$$\mu_k = M[(X - M(X))^k].$$

Из определения 2, установленной выше теоремы (пункт 1) и определения дисперсии следует, что

$$\mu_1 = M[X - M(X)] = 0,$$
$$\mu_2 = M[(X-M(X))^2] = D(X). \qquad (2)$$

Сравнивая соотношения (1) и (2), получаем

$$\mu_2 = \upsilon_2 - \upsilon_1{}^2.$$

Пример. Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

X	1	3
p	0,4	0,6

Найти начальные моменты первого, второго порядков и центральный момент второго порядка. Имеем

$$\upsilon_1 = M(X) = 1 \cdot 0{,}4 + 3 \cdot 0{,}6 = 2{,}2,$$
$$\upsilon_2 = M(X^2) = 1 \cdot 0{,}4 + 9 \cdot 0{,}6 = 5{,}8,$$
$$\mu_2 = 5{,}8 - 2{,}2^2 = 5{,}8 - 4{,}84 = 0{,}96.$$

§ 7.7. ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДИСКРЕТНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

1. Биномиальное распределение. Пусть производится n испытаний, причем вероятность появления события A в каждом испытании равна p и не зависит от исхода других испытаний (независимые испытания). Так как вероятность наступления события A в одном испытании равна p, то вероятность его ненаступления равна $q = 1 - p$.

Найдем вероятность того, что при n испытаниях событие A наступит m раз ($m \le n$).

Пусть событие A наступило в первых m испытаниях m раз и не наступило во всех последующих испытаниях. Это сложное событие можно записать в виде произведения:

$$\underbrace{AA\ldots A}_{m \text{ раз}}\ \underbrace{\bar{A}\bar{A}\ldots\bar{A}}_{n-m \text{ раз}}.$$

Общее число сложных событий, в которых событие A при n испытаниях наступает m раз, равно числу сочетаний из n элементов по m элементов. При этом вероятность каждого сложного события равна: $p^m q^{n-m}$. Так как эти сложные события являются несовместимыми, то вероятность их суммы равна сумме их вероятностей. Итак, если $P_n(m)$ есть вероятность появления события A m раз в n испытаниях, то

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m},$$

или

$$P_n(m) = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}. \tag{1}$$

Формулу (1) называют *формулой Бернулли.*

Пример 1. Пусть всхожесть семян данного растения составляет 90%. Найдите вероятность того, что из четырех посеянных: семян взойдут: а) три; б) не менее трех.

а). В данном случае $n = 4$, $m = 3$, $p = 0{,}9$, $q = 1 - p = 0{,}1$. Применим формулу Бернулли (1):

$$P_4(3)=\frac{4!}{3!1!}(0{,}9)^3\cdot 0{,}1=0{,}2916.$$

б) Искомое событие A состоит в том, что из четырех семян взойдут или три, или четыре. По теореме сложения вероятностей $P(A) = P_4(3) + P_4(4)$. Но $P_4(4) = (0{,}9)^4 = 0{,}6561$. Поэтому $P(A) = 0{,}2916 + 0{,}6561 = 0{,}9477$.

Снова рассмотрим n независимых испытаний, в каждом из которых наступает событие A с вероятностью p. Обозначим через X случайную величину, равную числу появлений события A в n испытаниях.

Понятно, что событие A может вообще не наступить, наступить один раз, два раза и т. д., и наконец, наступить n раз. Следовательно, возможными значениями величины X будут числа 0, 1, 2, ..., $n-1$, n. По формуле Бернулли можно найти вероятности этих значений:

$$P_n(0) = C_n^0 q^n = q^n,$$
$$P_n(1) = C_n^1 q^{n-1} p,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$P_n(n) = q^n.$$

Запишем полученные данные в виде таблицы распределения:

X	0	1	...	m	...	n
p	q^n	$C_n^1 p\, q^{n-1}$	...	$C_n^m p^m\, q^{n-m}$	...	p^n

Построенный закон распределения дискретной случайной величины X называют *законом биномиального распределения.*

Найдем $M(X)$. Очевидно, что X_i — число появлений события A в каждом испытании — представляет собой случайную величину со следующим распределением:

X_i	0	1
p_i	q	p

Поэтому $M(X_i) = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p$. Но так как $X = X_1 + \ldots + X_n$, то $M(X) = np$.

Найдем далее $D(X)$ и $\sigma(X)$. Так как величина X_i^2 имеет распределение

X_i^2	0^2	1^2
p_i	q	p

то $M(X_i^2) = 0^2 \cdot q + 1^2 \cdot p = p$. Поэтому

$$D(X_i)=M(X_i^2) - M^2(X_i) = p - p^2 = p\,(1-p)= pq.$$

Наконец, в силу независимости величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$

$$D(X) = D(X_1) + D(X_2) + \ldots + D(X_n) = npq.$$

Отсюда

$$\sigma(X) = \sqrt{npq}.$$

Пример 2. Случайная величина X определена как число выпавших гербов в результате 100 бросаний монеты. Вычислите математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение X.

Вероятность появления герба в каждом бросании монеты: $p = \frac{1}{2}$. Следовательно, вероятность непоявления герба $q = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Случайная величина X имеет биномиальное распределение при $n = 100$ и $p = \frac{1}{2}$. Поэтому $M(X) = np = 100 \cdot \frac{1}{2} = 50$, $D(X) = npq = 100 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 25$, $\sigma(X) = \sqrt{npq} = \sqrt{25} = 5$.

Пример 3. Допустим, что для хищника вероятность поимки отдельной жертвы составляет 0,4 при каждом столкновении с жертвой. Каково ожидаемое число пойманных жертв в 20 столкновениях?

Это пример биномиального распределения при $n = 20$ и $p = 0{,}4$. Ожидаемое число есть $M(X) = np = 20 \cdot 0{,}4 = 8$.

Пример 4. Применяемый метод лечения приводит к выздоровлению в 80% случаев. Какова вероятность того, что из 5 больных выздоровеет 4?

В данном случае $p = 0{,}8$, $q = 1 - р = 0{,}2$, $n = 5$, $m = 4$. Поэтому по формуле Бернулли

$$P_5(4) = \frac{5!}{4!(5-4)!}(0{,}8)^4(0{,}2)^{5-4} = \frac{5 \cdot 8^4 \cdot 2}{10^5} = \frac{8^4}{10^4} = 0{,}4096 \approx 0{,}41.$$

Пример 5. В условии предыдущего примера найдем вероятность того, что из 5 больных выздоровит не менее 4.

Искомая вероятность есть сумма вероятностей $P_5(4) + P_5(5)$. Имеем:

$$P_5(4) + P_5(5) = 0{,}4096 + (0{,}8)^5 = 0{,}4096 + 0{,}32768 = 0{,}73728 \approx 0{,}74.$$

Задача об экстрасенсе. Обычный человек примерно в половине случаев правильно угадывает, в какой руке спрятан мелкий предмет. Предположим, что верный ответ получен в трех случаях из четырех. Случайно ли это? Или при таком результате можно говорить о необычных способностях угадывающего?

Если принять вероятность угадывания в норме $p = ½$, то по формуле Бернулли

$$P_4(3) = C_4^3 p^3 q,$$

где

$$q = 1 - p,$$

или

$$P_4(3) = 4\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Как видим, каждый четвертый нормальный человек правильно угадывает в трех случаях из четырех.

Допустим, что верный ответ получен в девяти случаях из десяти. Какова вероятность такого угадывания у нормального человека? По формуле Бернулли

$$P_{10}(9) = C_{10}^9 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{2} = C_{10}^1 \cdot \frac{1}{2^{10}} \approx 0{,}01.$$

Таким образом, нормальный человек лишь в одном случае из 100 может случайно продемонстрировать такой результат. И если подобное угадывание происходит чаще, то можно, по-видимому, говорить, что угадыватель — экстрасенс (или мистификатор).

2. Распределение Пуассона. Пусть производится серия n независимых испытаний (n = 1, 2, 3, ...), причем вероятность появления данного события A в этой серии $P(A) = p_n > 0$ зависит от ее номера n и стремится к нулю при $n \to \infty$ (последовательность *«редких событий»)*. Предположим, что для каждой серии среднее значение числа появлений события A постоянно, т. е. $np_n = \mu = \mathrm{const}$.

Отсюда $p_n = \frac{\mu}{n}$.

Исходя из формулы Бернулли (1), для вероятности появления события A в n-й серии ровно m раз имеем выражение

$$P_n(m) = C_n^m p_n^m (1 - p_n)^{n-m} = C_n^m \left(\frac{\mu}{n}\right)^m \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^{n-m}.$$

Пусть m фиксировано. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} C_n^m \left(\frac{\mu}{n}\right)^m = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-(m-1))\mu^m}{m!n^m} = \frac{\mu^m}{m!} \lim_{n\to\infty}\left(1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)\right) = \frac{\mu^m}{m!};$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^{n-m} = e^{-\mu}$$

(здесь использован второй замечательный предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$).

Поэтому

$$\lim_{n\to\infty} P_n(m) = \frac{\mu^m}{m!} e^{-\mu}.$$

Если n велико, то в силу определения предела вероятность $P_n(m)$ сколь угодно мало отличается от $\frac{\mu^m}{m!}e^{-\mu}$. Отсюда при больших n для искомой вероятности $P_n(m)$ имеем приближенную формулу Пуассона (для простоты знак приближенного равенства опущен)

$$P_n(m)=\frac{\mu^m}{m!}e^{-\mu}\ , \text{где } \mu = np_n.$$

Определение. Говорят, что случайная величина X распределена по *закону Пуассона,* если эта величина задана таблицей:

X	0	1	2	3	...
p	$e^{-\mu}$	$\mu e^{-\mu}$	$\frac{\mu^2}{2!}e^{-\mu}$	$\frac{\mu^3}{3!}e^{-\mu}$	...

Здесь μ — фиксированное положительное число (разным значениям μ отвечают разные распределения Пуассона).

Найдем математическое ожидание дискретной величины X, распределенной по закону Пуассона. Согласно определению математического ожидания (см. § 7.5, п. 2, примечание 2)

$$M(X)=\sum_{k=0}^{\infty}k\frac{\mu^k}{k!}e^{-\mu}=\mu e^{-\mu}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mu^{k-1}}{(k-1)!}=\mu e^{-\mu}e^{\mu}=\mu\ .^1$$

Найдем далее $D(X)$. Сначала найдем $M(X^2)$:

$$M\left(X^2\right)=\sum_{k=0}^{\infty}k^2\frac{\mu^k}{k!}e^{-\mu}=\mu e^{-\mu}\sum_{k=1}^{\infty}k\frac{\mu^{k-1}}{(k-1)!}=\mu e^{-\mu}\left(\mu\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\mu^{k-2}}{(k-2)!}+e^{\mu}\right)=$$
$$=\mu e^{-\mu}\left(\mu e^{\mu}+e^{\mu}\right)=\mu^2+\mu.$$

Теперь по известной формуле (см. § 7.6, п. 2)

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = \mu^2 + \mu - \mu^2 = \mu.$$

Распределение Пуассона крайне важно во многих физических и биологических задачах. Оно представляет собой грубую модель частоты встречаемости катастрофических наводнений при довольно длительном периоде наблюдений. Распределение микроэлементов в образце почвы может также приближаться к пуассоновскому. Возможности приложений распределения Пуассона в естествознании иллюстрируют два следующих примера.

[1] Здесь, как и при нахождении $M(X^2)$, используется известное разложение $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\ |x|<+\infty$

Редкие болезни. Многие болезни достаточно редки или становятся таковыми после принятия профилактических и лечебных мер. Однако даже при самых благоприятных условиях в больших популяциях все же встречается некоторое число больных редкими болезнями. Например, при введении вакцины против полиомиелита иммунитет создается в 99,99 % случаев. Какова вероятность того, что из 10000 вакцинированных детей заболеет 1?

Вероятность заболеть $p = 1 - 0{,}9999 = 0{,}0001$, число испытаний $n = 10000$. Поэтому $\mu = 0{,}0001 \cdot 10000 = 1$, и по формуле Пуассона имеем

$$\frac{1}{1!}e^{-1} \approx 0{,}368.$$

Аналогично, вероятность, что заболеют 2 ребенка:

$$\frac{1^2}{2!}e^{-1} \approx 0{,}184,$$

а вероятности заболевания 3 и 4 детей соответственно равны:

$$\frac{e^{-1}}{3!} \approx 0{,}061,$$

$$\frac{e^{-1}}{4!} \approx 0{,}015.$$

Радиоактивный распад. Рассмотрим пробу радиоактивного вещества, которое в среднем дает r импульсов радиоактивности в одну секунду. Ожидаемое число импульсов за t секунд есть rt. Этот процесс можно описать распределением Пуассона. Проба состоит из очень большого числа n радиоактивных атомов, причем каждый атом имеет крайне малую вероятность p распада в течение одной секунды. Ожидаемое число распадов за 1 с есть $r = np$. Ожидаемое число распадов за t с есть $rt = npt$. Это является математическим ожиданием распределения Пуассона, которое дает вероятность k распадов за t секунд:

$$\frac{(rt)^k}{k!}e^{-rt}.$$

Если, например, имеется три импульса радиоактивности в 1 с, то вероятность возникновения 10 импульсов за 5-секундный интервал составляет

$$\frac{(3\cdot 5)^{10}}{10!}e^{-3\cdot 5} = \frac{15^{10}}{10!}e^{-15}.$$

Подсчет клеток под микроскопом. Предположим, что n клеток определенного типа распределены случайным образом по площади предметного стекла, которое разбито квадратной решеткой на 900 (30×30) равных участков. Вероятность того, что конкретная клетка лежит в данном участке решетки, есть $p = 1/900$. Процесс размещения n клеток на предметном стекле можно рассматривать как n повторных испытаний для биномиального эксперимента, где «успех» определяется как попадание клетки в конкретный участок решетки. Если n велико, то для вычисления вероятности того, что конкретный участок решетки содержит k клеток, можно воспользоваться пуассоновским приближением биномиального распределения: $\mu = np = n/900$.

Значит, величина

$$\frac{(np)^k}{k!}e^{-np} = \left(\frac{n}{900}\right)^k \frac{e^{-n/900}}{k!},\ k = 0,1,2,...$$

дает долю тех из 900 участков, в которых содержится по k клеток. Общее число участков, содержащих по k клеток, равно $900\frac{(np)^k}{k!}e^{-np}$. Например, ожидается, что в среднем $900e^{-n/900}$ участков не содержат ни одной клетки.

Это дает нам метод оценки общего числа имеющихся клеток путем определения числа тех участков квадратной решетки, которые не содержат этих клеток. Если, например, клеток нет в 75 участках квадратной решетки, то

$$75 = 900e^{-n/900}.$$

Отсюда

$$n = 900 \ln(900/75) = 900 \ln 12 = 2240.$$

(Здесь можно использовать калькулятор.)

Основное допущение, сделанное нами, состоит в том, что n клеток распределены по площади стекла случайно. Если это допущение справедливо, то распределение Пуассона дает весьма эффективное средство оценки числа клеток на стекле.

§ 7.8. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ БИОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

1. Построение математической модели. Модель биологического процесса представляет собой набор допущений относительно данного процесса в совокупности с анализом логических следствий из этих допущений. Математическая модель получается тогда, когда допущения можно выразить в математической форме. Разумеется, модели строятся для описания реальных процессов, и всякое предсказание, основанное на анализе модели, необходимо сравнивать с экспериментальными наблюдениями, чтобы проверить справедливость сделанных допущений.

Если допущения модели выражены в математической форме, то для вывода логических следствий из этих допущений в распоряжении исследователя имеется весь арсенал математических средств. Очень часто эти математические следствия приводят к таким предсказаниям, связанным с биологическим процессом, которые вряд ли можно было бы понять и предвидеть, занимаясь лишь экспериментом и наблюдениями.

Модель подсчета клеток под микроскопом (см. § 7.7, п. 3) приводит к тому удивительному результату, что общее число клеток можно определить, считая попросту количество тех квадратов решетки, в которых клеток не содержится.

В математической форме выражения допущений биологической модели имеются и определенные недостатки. Часто бывает необходимо существенно упростить задачу. Если такое упрощение заходит слишком далеко, то модель перестает отражать какие- то важные черты реальности, которые мы стремимся понять.

После того как проанализированы результаты простой модели, ее можно сделать более реалистичной, изменив некоторые допущения модели. Следует также подчеркнуть, что в настоящее время с развитием быстродействующих ЭВМ некоторые типы сложных моделей перестали быть сложными для анализа.

Математические модели стали обязательным инструментом исследований почти в каждой области биологии.

В предшествующих параграфах этой главы уже были рассмотрены различные модели биологических процессов. Ниже остановимся на более сложных моделях биологических процессов.

2. Выживание и вымирание видов. Если в одном и том же географическом регионе обитают популяции двух видов, имеющих одинаковые экологические потребности в пище, пространстве и других ресурсах, то, согласно теории конкуренции, надо ожидать, что более приспособленный из двух видов полностью вытеснит менее приспособленный. В этом состоит суть принципа конкурентного исключения. Итак, принцип конкурентного исключения утверждает, что если два вида имеют одинаковые экологические потребности, то более приспособленный вид будет вытеснять менее приспособленный. Чтобы получить модель этого процесса, рассмотрим случай двух конкурирующих видов с одинаковыми экологическими потребностями, сосуществующих в некоторый момент времени в среде, которая способна обеспечить ресурсами ровно N особей обоих видов. Допустим, что первоначально в среде имелось k особей вида I и $N - k$ особей вида II. Предположим, что конкуренцию между двумя видами можно представить как последовательность столкновений между ними, причем вероятность того, что вид I увеличится после столкновения на одну особь, равна p, а вероятность увеличения на одну особь вида II есть $q = 1 - p$. Например, оба вида приспособлены одинаково, если $p = q = 1/2$, и первый вид обладает селективным преимуществом, если $p > q$. Допустим, что p не зависит от численностей k и $N - k$ обоих видов.

Конкуренция по этим правилам продолжается до тех пор, пока один из видов не вытеснит полностью другой. Именно этот процесс хотелось бы понять. Для этого определим p_k как вероятность того, что вид I вытесняет вид II, если начальная численность вида I была равна k. Если начальная численность популяции есть 0, то $p_0 = 0$, так как вид I уже вытеснен. Если начальная численность популяции равна N особей, то $p_N = 1$, поскольку вид I уже вытеснил вид II. После первого столкновения популяция вида I будет насчитывать $k+1$ или $k - 1$ особей с вероятностями p и q соответственно. Таким образом, вероятность p_k представляет собой сумму двух членов:

$$p_k = pp_{k+1} + qp_{k-1}. \tag{1}$$

Здесь pp_{k+1} означает вероятность того, что после одного хода вид I имеет численность $k + 1$ и вытесняет затем вид II. Аналогично, qp_{k-1} означает вероятность того, что вид I имеет после одного хода численность $k - 1$ и вытесняет затем вид II.

Соотношение (1) — это линейное разностное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами (см. § 6.3).

Будем искать его решение в виде $p_k = \lambda^k$. Характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^k = p\lambda^{k+1} + q\lambda^{k-1}, \text{ или } p\lambda^2 - \lambda + q = 0.$$

Корни этого квадратного уравнения находятся по формуле

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1-4pq}}{2p} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4p(1-p)}}{2p} = \frac{1 \pm (1-2p)}{2p},$$

откуда

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = (1 - p)/p = q/p.$$

Эти корни равны, когда $p = q = 1/2$. Таким образом, общее решение уравнения (1) имеет следующий вид:

$$p_k = c_1 + c_2\,(q/p)^k \text{ при } p \neq q,$$

$$p_k = c_1 + c_2 k \text{ при } p = q,$$

где c_1 и c_2 — постоянные, подлежащие нахождению. Согласно определению p_k, было установлено, что $p_0 = 0$ и $p_N = 1$. Значит, если $p_N \neq 1/2$, то

$$c_1 + c_2 = 0, c_1 + c_2(q/p)^N = 1.$$

Отсюда следует, что

$$c_1 = \frac{1}{1-(q/p)^N}, \; c_2 = \frac{-1}{1-(q/p)^N}.$$

Если $p = 1/2$, то $c_1 = 0$ и $c_2 N = 1$, или $c_2 = 1/N$. Окончательно приходим к тому, что искомое решение уравнения (1) есть

$$p_k = \frac{1-(q/p)^k}{1-(q/p)^N} \text{ при } p \neq q,$$

$$p_k = k/N \text{ при } p = 1/2.$$

В данной простой модели мы смогли в явном виде вычислить вероятность вытеснения одного вида другим. Рассмотрим различные возможности для популяций с общей численностью $N = 1000$. Если начальные популяции обоих видов насчитывали по 500 особей и если $p = q = 1/2$, то вероятность вытеснения видом I вида II равна $p_{500} = 500/1000 = 1/2$. Это указывает на то, что в данном случае ни один из видов не имеет конкурентного преимущества. Но если $p = 2/3$ и $q = 1/3$, то

$$p_{500} = \frac{1-(1/2)^{500}}{1-(1/2)^{1000}} = \frac{1}{1+(1/2)^{500}} .$$

Число $(1/2)^{500}$ крайне мало. Поэтому в данном случае практически с единичной вероятностью вид II будет вымирать. Даже малые конкурентные преимущества (когда p чуть больше 1/2) при данных начальных численностях приводят к такому же результату. Заметим, что если $p = 2/3$ и $q = 1/3$, когда начальные численности видов I и II равны соответственно 1 и 999, то вероятность вытеснения первым видом второго есть

$$p_1 = \frac{1-(1/2)^{1}}{1-(1/2)^{1000}} \approx \frac{1}{2}.$$

В частности, отсюда следует, что если даже один индивидуум более приспособленного вида вторгается на территорию другого вида, то с вероятностью 1/2 внедряющийся вид полностью вытеснит коренной вид. Если же $p = q = 1/2$, то $p_1 = 1/1000$. Иными словами, если оба вида одинаково хорошо приспособлены, то маловероятно, что появление единичного индивидуума одного вида приведет к вытеснению другого вида.

§ 7.9. НЕПРЕРЫВНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

1. Интегральная функция распределения. Для непрерывной случайной величины в отличие от дискретной нельзя построить таблицу распределения. Поэтому непрерывные случайные величины изучаются другим способом, который мы и будем рассматривать.

Пусть X — непрерывная случайная величина с возможными значениями из некоторого интервала $(a; b)$ и x — действительное число. Под выражением $X < x$ понимается событие «случайная величина X приняла значение, меньшее x». Вероятность этого события $P(X<x)$ есть некоторая функция переменной x:

$$F(x) = P(X < x).$$

Определение. *Интегральной функцией распределения* (или кратко *функцией распределения*) непрерывной случайной величины X называется функция $F(x)$, равная вероятности того, что X приняла значение, меньшее x:

$$F(x) = P(X < x). \tag{1}$$

$F(x)$ — это геометрический смысл этого равенства: вероятность того, что случайная величина X примет значение, которое изображается на числовой оси точкой, лежащей левее точки x.

Отметим, что функция распределения совершенно так же определяется для дискретных случайных величин.

Укажем свойства, которыми обладает функция $F(x)$.

1. $0 \le F(x) \le 1$.

Это свойство следует из того, что $F(x)$ есть вероятность.

2. *$F(x)$ — неубывающая функция, т. е. если $x_1 < x_2$,* то $F(x_1) \le F(x_2)$.

Доказательство. Предположим, что $x_1 < x_2$. Событие «X примет значение, меньшее x_2» можно представить в виде суммы двух несовместимых событий: «X примет значение, меньшее x_1» и «X примет значение, удовлетворяющее неравенствам $x_1 \le X < x_2$». Обозначим вероятности последних двух событий соответственно через $P(X < x_1)$ и $P(x_1 \le X < x_2)$. По теореме о вероятности суммы двух несовместимых событий имеем

$$P(X < x_2) = P(X < x_1) + P(x_1 \le X < x_2),$$

откуда с учетом равенства (1)

$$P(x_1 \le X< x_2) = F(x_2) - F(x_1). \tag{2}$$

Так как вероятность любого события есть число неотрицательное, то $P(x_1 \le X < x_2) \ge 0$ и, значит,

$$F(x_2) \ge F(x_1).$$

Формула (2) утверждает свойство 3.

3. *Вероятность попадания случайной величины X в полуинтервал $[a; b)$ равна разности между значениями функции распределения в правом и левом концах интервала $(a; b)$:*

$$P(a \le X < b) = F(b) - F(a). \tag{3}$$

В частности, в случае полуинтервала $[x; x + \Delta x)$

$$P(x \le X < x + \Delta x) = F(x + \Delta x) - F(x). \tag{3'}$$

Пример 1 Пусть случайная величина X задана функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le -1; \\ \frac{x}{4} + \frac{1}{4} \text{ при } -1 < x \le 3; \\ 1 \text{ при } x > 3. \end{cases}$$

Найдем вероятность того, что в результате испытания X примет значение, принадлежащее полуинтервалу [0; 2).

Так как на полуинтервале [0; 2) $F(x)=\frac{x}{4}+\frac{1}{4}$, то в силу (3)

$$P(0\le X<2)=F(2)-F(0)=\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{4}=\tfrac{1}{2}.$$

П р и м е р 2. Пусть имеются два нейрона, независимо разряжающиеся в произвольный момент времени из промежутка [0, T] после начала действия раздражителя. Случайная величина X — расстояние между началом разрядов обоих нейронов — задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0,\ x\le 0;\\ 1-\left(\dfrac{T-x}{T}\right)^2,\ 0<x\le T;\\ 1,\ x>T.\end{cases}$$

Оценим вероятность отставания начала разрядов нейронов друг от друга на величину, не превышающую $\frac{T}{4}$ и не меньшую $\frac{T}{10}$.

Поскольку на отрезке $\left[\frac{T}{10},\frac{T}{4}\right]$ $F(x)=1-\left(\frac{T-x}{T}\right)^2$, то согласно формуле (3)

$$P\left(\frac{T}{10}\le x\le\frac{T}{4}\right)=\left[1-\left(\frac{\frac{3}{4}T}{T}\right)^2\right]-\left[1-\left(\frac{\frac{9}{10}T}{T}\right)^2\right]=-\frac{9}{16}+\frac{81}{100}=\frac{99}{400}\approx 0{,}25.$$

В дальнейшем случайную величину будем называть *непрерывной*, если ее функция распределения непрерывна с непрерывной или кусочно-непрерывной производной.

4. *Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет какое-либо заранее заданное значение, равна нулю:*

$$P(X=x_1)=0. \tag{4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положив в (3′) $x_2=x_1+\Delta x$, будем иметь

$$P(x_1\le X<x_1+\Delta x)=F(x_1+\Delta x)-F(x_1). \tag{5}$$

Так как $F(x)$ — непрерывная функция, то, перейдя в (5) к пределу при $\Delta x\to 0$, получим искомое равенство (4).

Из свойства 4 следует свойство 5.

5. *Вероятности попадания непрерывной случайной величины в интервал, сегмент и полуинтервал с одними и теми же концами одинаковы:*

$$P(a < X < b) = P(a \le X \le b) = P(a \le X < b) = P(a < X \le b). \qquad (6)$$

6. *Если возможные значения случайной величины X принадлежат интервалу* $(a;\, b)$, *то:* 1) $F(x) = 0$ *при* $x \le a$; *2)* $F(x) = 1$ *при* $x \ge b$.

Доказательство. 1) Пусть $x_1 \le a$. Тогда событие $X < x_1$ невозможно, и, следовательно, вероятность его равна нулю. 2) Пусть $x_2 \ge b$. Тогда событие $X < x_2$ достоверно, и, следовательно, вероятность его равна 1.

Следствие. *Если возможные значения непрерывной случайной величины расположены на всей числовой оси, то справедливы следующие предельные соотношения:*

$$F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0;\ F(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1.$$

2. Дифференциальная функция распределения. *Дифференциальной функцией распределения* непрерывной случайной величины X (или ее *плотностью вероятности,* или ее *плотностью распределения*) называется функция $f(x)$, равная производной интегральной функции

$$f(x) = F'(x),$$

Пример 1. Плотность, соответствующая F(x) в примере 2 (п. 1), есть

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0,\ x \le 0, \\ \dfrac{2(T-x)}{T^2},\ 0 < x \le T, \\ 0,\ x > T. \end{cases}$$

Так как $F(x)$ — неубывающая функция, то $f(x) \ge 0$.

Из равенства (3) с учетом приближенного равенства $F(x + \Delta x) - F(x) \approx F'(x)\Delta x$ справедливого для малых $|\Delta x|$ и свойства 5 (п.1) имеем

$$P(x < X < x + \Delta x) \approx F'(x)\Delta x$$

или

$$P(x < X < x + \Delta x) \approx f(x)\Delta x$$

(для малых Δx), т. е. вероятность попадания случайной величины X в интервал $(x;\, x + \Delta x)$ при малых Δx приближенно равна произведению ее плотности вероятности в точке x на длину этого интервала.

Имеет место и следующая теорема.

Теорема. В*ероятность попадания непрерывной случайной величины X в интервал $(a;\, b)$ равна определенному интегралу от ее плотности вероятности, взятому в пределах от a до b:*

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx\,. \qquad (7)$$

Доказательство. Так как $F(x)$ является первообразной для f(x), то на основании формулы Ньютона — Лейбница имеем

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \tag{8}$$

Теперь с учетом соотношений (3), (6), (8) получим искомое равенство.

Из (7) следует, что геометрически вероятность $P(a < X < b)$ представляет собой площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком плотности вероятности $y = f(x)$ и отрезками прямых $y = 0$, $x = a$ и $x = b$.

Следствие. В частности, если $f(x)$ — *четная функция и концы интервала симметричны относительно начала координат, то*

$$P(-a < X < a) = P(|X| < a) = 2\int_0^a f(x)dx. \tag{9}$$

Действительно,

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = -\int_a^0 f(-x)dx + \int_0^a f(x)dx =$$
$$= \int_0^a f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx.$$

Пример 2 Пусть задана плотность вероятности случайной величины X

$$f(x) = \begin{cases} 0, \ x < 0; \\ 2x \ 0 \le x \le 1; \\ 0 \ x > 1. \end{cases}$$

Найдем вероятность того, что в результате испытания X примет значение, принадлежащее интервалу (0,5; 1).

Согласно формуле (7), искомая вероятность

$$P(0{,}5 < X < 1) = 2\int_{0{,}5}^{1} xdx = x^2\Big|_{0{,}5}^{1} = 0{,}75.$$

Пример 3. Оцененную в примере 2 (п. 2) вероятность отставания начала разрядов нейронов друг от друга на величину, не превышающую $\frac{T}{4}$ и не меньшую $\frac{T}{10}$, можно оценить и через плотность распределения, полученную в примере 1 (п. 2).

$$P\left(\frac{T}{10} \le X \le \frac{T}{4}\right) = \frac{2}{T^2}\int\limits_{\frac{T}{10}}^{\frac{T}{4}}(T-x)dx = -\frac{1}{T}(T-x)^2\Bigg|_{\frac{T}{10}}^{\frac{T}{4}} = -\frac{9}{16}+\frac{81}{100} \approx 0{,}25.$$

Заменяя в формуле (8) a на $-\infty$ и b на x, получим

$$F(x)-F(-\infty) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx,$$

откуда в силу приведенного выше следствия (п. 1)

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx \qquad (10)$$

Выражение (10) позволяет найти интегральную функцию распределения $F(x)$ по ее плотности вероятности.

Заметим, что из формулы (10) и отмеченного следствия (п. 1) вытекает, что

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1. \qquad (11)$$

Пример 4. Пусть плотность вероятности случайной величины X задана так:

$$f(x) = \frac{A}{1+x^2}\left(-\infty < x < +\infty\right).$$

Требуется найти коэффициент A, функцию распределения $F(x)$ и вероятность попадания случайной величины X в интервал (0; 1).

Коэффициент A найдем, воспользовавшись соотношением (11). Так как

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{Adx}{1+x^2} = \int\limits_{-\infty}^{0}\frac{Adx}{1+x^2} + \int\limits_{0}^{+\infty}\frac{Adx}{1+x^2} = A\ \mathrm{arctg}x\Big|_{-\infty}^{0} + A\ \mathrm{arctg}x\Big|_{0}^{+\infty} =$$
$$= A\left[\mathrm{arctg}(+\infty) - \mathrm{arctg}(-\infty)\right] = A\pi,$$

то $A\pi = 1$, откуда $A = 1/\pi$.

Применяя формулу (10), получим функцию распределения $F(x)$:

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x}\frac{dx}{\pi(1+x^2)} = \frac{1}{\pi}\mathrm{arctg}x\Big|_{-\infty}^{x} = \frac{1}{\pi}\left[\mathrm{arctg}x - \mathrm{arctg}(-\infty)\right] = \frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\mathrm{arctg}x.$$

Наконец, формулы (3) и (6) с учетом найденного значения функции $F(x)$ дают

$$P(0 < X < 1) = F(1) - F(0) = 0{,}25.$$

3. Математическое ожидание и дисперсия непрерывной случайной величины

Пусть непрерывная случайная величина X задана плотностью вероятности $f(x)$. Допустим, что все возможные значения X принадлежат отрезку $[a; b]$. Точками $x_0 = a < x_1 < x_2 \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ разобьем его на n частичных отрезков, длины которых обозначим через $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$. Наибольшую из этих длин обозначим через λ.

Предполагая определить математическое ожидание непрерывной случайной величины по аналогии с дискретной, составим сумму

$$\sum_{k=1}^{n} x_k f\left(x_k\right) \Delta x_k$$

[напомним, что произведение $f(x_k)\Delta x_k$ при малых Δx_k приближенно равно вероятности попадания случайной величины X в интервал $(x_k, x_k + \Delta x_k)$ см. § 7.9 п. 2]. Перейдя в этой сумме к пределу при $\lambda \to 0$, получим определенный интеграл $\int_a^b x f\left(x\right) dx$, который и называют *математическим ожиданием непрерывной случайной величины* X, все возможные значения которой принадлежат отрезку $[a; b]$:

$$M\left(X\right) = \int_a^b x f\left(x\right) dx\,.$$

Если возможные значения непрерывной случайной величины X принадлежат всей числовой оси, то математическое ожидание определяется интегралом

$$M\left(X\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f\left(x\right) dx\,.$$

При этом предполагается, что несобственный интеграл сходится абсолютно, т. е. интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} \left|x\right| f\left(x\right) dx$ существует.

По аналогии с дисперсией дискретной случайной величины определяется и дисперсия непрерывной случайной величины.

Дисперсией непрерывной случайной величины X называют математическое ожидание квадрата ее отклонения.

Если все возможные значения X принадлежат отрезку $[a; b]$, то

$$D(X)=\int_a^b [x-M(X)]^2 f(x)dx,$$

если возможные значения X принадлежат всей числовой оси, то

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} [x-M(X)]^2 f(x)dx$$

при условии, что последний несобственный интеграл сходится.

Заметим, что свойства математического ожидания и дисперсии дискретных случайных величин сохраняются и для непрерывных случайных величин.

Наконец, для непрерывной случайной величины X *среднее квадратическое отклонение* $\sigma(X)$определяется, как и для дискретной величины, формулой $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$.

Пример. Пусть случайная величина X задана плотностью вероятности

$$f(x)=\begin{cases} 0 \text{ при } x<0; \\ \frac{x}{2} \text{ при } 0 \le x \le 2; \\ 0 \text{ при } x>2. \end{cases}$$

Определим математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение величины X.

Согласно приведенным формулам для $M(X)$ и $D(X)$ имеем

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^2 x^2dx=\left.\frac{x^3}{6}\right|_0^2=4/3\approx 1{,}33.$$

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(x-\frac{4}{3}\right)^2 f(x)dx=\int_0^2\left(x-\frac{4}{3}\right)^2\frac{1}{2}xdx=\frac{1}{2}\int_0^2\left(x^2-\frac{8}{3}x+\frac{16}{9}\right)xdx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^2\left(x^3-\frac{8}{3}x^2+\frac{16}{9}x\right)dx=\frac{1}{2}\left.\left(\frac{x^4}{4}-\frac{8}{9}x^3+\frac{8}{9}x^2\right)\right|_0^2=\frac{1}{2}\left(4-\frac{64}{9}+\frac{32}{9}\right)=\frac{2}{9}\approx 0{,}22$$

и, наконец,

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\frac{\sqrt{2}}{3}\approx 0{,}47.$$

П р и м е ч а н и е. Отметим, что по аналогии с начальным и центральными моментами порядка *k* дискретной случайной величины определяются начальный и центральный моменты того же порядка и для непрерывной случайной величины.

§ 7.10. НОРМАЛЬНЫЙ ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

О п р е д е л е н и е. Закон распределения вероятностей непрерывной случайной величины X называется *нормальным законом,* или *законом Гаусса*[1], если ее плотность вероятности есть

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \tag{1}$$

где σ и a — постоянные, причем $\sigma > 0$.
Убедимся, что функция (1) удовлетворяет условию (11) (§ 7.9).

Действительно, перейдя в интеграле

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx \tag{2}$$

к новой переменной

$$t=\frac{x-a}{\sigma\sqrt{2}}, \tag{3}$$

получим интеграл

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{+\infty} e^{-t^2}dt.$$

Но $\int_{0}^{+\infty} e^{-t^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (см. приложение 1).

Следовательно,

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt=1. \tag{4}$$

Значит, интеграл (2) тоже равен единице.

Покажем, что $M(X) = a$, $\sigma=\sqrt{D(X)}$ или $\sigma^2 = D(X)$.

---

[1] Карл Гаусс (1777-1855) — немецкий математик.

Имеем (см. § 7.9, п. 3);

$$M\left(X\right)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}xe^{-\frac{\left(x-a\right)^{2}}{2\sigma^{2}}}dx\,.$$

Введя новую переменную t по формуле (3), с учетом равенства (4) получим

$$M\left(X\right)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(a+t\sigma\sqrt{2}\right)e^{-t^{2}}\sigma\sqrt{2}dt=$$

$$=\frac{a}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^{2}}dt+\frac{\sigma\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}te^{-t^{2}}dt=a-\frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}e^{-t^{2}}\Bigg|_{-\infty}^{+\infty}=a.$$

Далее, аналогично найдем

$$D\left(X\right)=-\frac{\sigma^{2}}{\sqrt{\pi}}\left(te^{-t^{2}}\right)\Bigg|_{-\infty}^{+\infty}+\frac{\sigma^{2}}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^{2}}dt=0+\sigma^{2}=\sigma^{2}\,.$$

График функции $y = e^{-x^2}$ (кривая *Гаусса) имеет* вид (рис 42). С учетом графика этой функции график функции (1) будет иметь вид (рис 43). Причем его максимальная ордината равна $1\Big/\left(\sigma\sqrt{2\pi}\right)$. Значит, эта ордината убывает с возрастанием значения σ (кривая «растягивается» к оси Ox — рис.44), возрастает с убыванием значения σ (кривая «сжимается» в положительном направлении оси Oy). Изменение значений параметра a (при неизменном значении σ) не влияет на форму кривой.

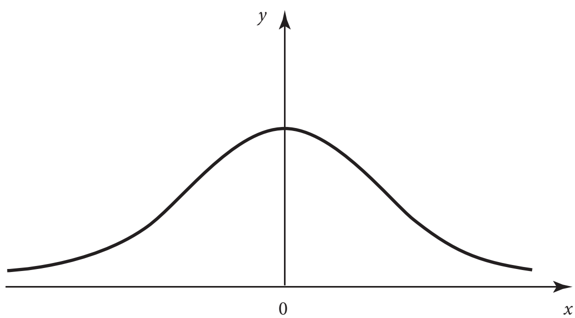


Рис. 42

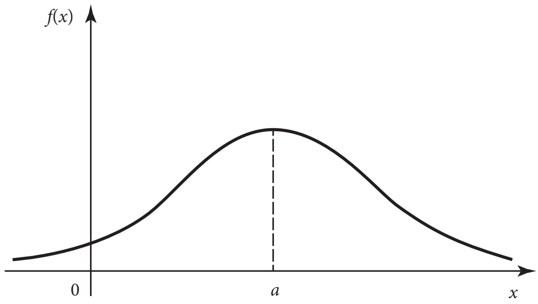


Рис. 43

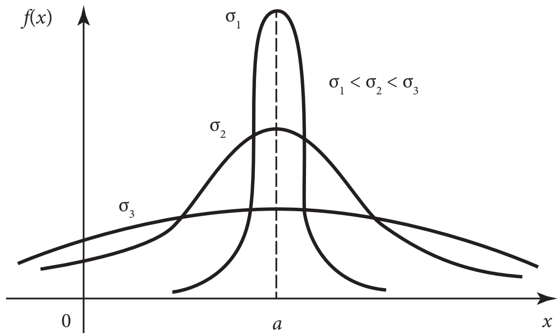


Рис. 44

Нормальное распределение с параметрами $a = 0$ и $\sigma = 1$ называется *нормированным.* Плотность вероятности в случае такого распределения оказывается равной

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Вероятность попадания случайной величины, распределенной по нормальному закону, в заданный интервал.

Пусть случайная величина X распределена по нормальному закону. Тогда вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу (α, β), согласно теореме из п. 2 § 7.9 (формула (7))

$$P(\alpha < X < \beta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Проведя в этом интеграле замену переменной $t = \frac{x-a}{\sigma}$, получим

$$P(\alpha < X < \beta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\frac{\alpha-a}{\sigma}}^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Учитывая, что функция $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ является первообразной для $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, и используя формулу Ньютона — Лейбница, будем иметь

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right). \qquad (5)$$

П р и м е р 1. Пусть случайная величина X распределена по нормальному закону с параметрами $a = 30$ и $\sigma = 10$. Найдем вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу (10; 50).

Пользуясь формулой (5), получим

$$P(10 < X < 50) = \Phi\left(\frac{50-30}{10}\right) - \Phi\left(\frac{10-30}{10}\right) = \Phi(2) - \Phi(-2) = 2\Phi(2).$$

По таблице приложения 3 находим $\Phi(2) = 0{,}4772$. Отсюда искомая вероятность

$$P(10 < X < 50) = 2 \cdot 0{,}4772 = 0{,}9544.$$

В ы ч и с л е н и е в е р о я т н о с т и з а д а н н о г о о т к л о н е н и я.

Часто требуется определить вероятность того, что отклонение нормально распределенной случайной величины X от ее математического ожидания по абсолютной величине меньше заданного положительного числа δ, т.е. нужно найти $P(|X - a| < \delta)$.

Используя формулу (5) и учитывая, что функция $\Phi(x)$ нечетная, имеем

$$P(|X-a| < \delta) = P(a-\delta < X < a+\delta) = \Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{\delta}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right),$$

т. е.

$$P(|X-a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right). \qquad (6)$$

П р и м е р 2. Пусть случайная величина X распределена по нормальному закону с параметрами $a = 20$ и $\sigma = 10$. Найдем $P(|X - 20| < 3)$.

Используя выражение (6) имеем

$$P\left(\left|X-20\right|<3\right)=2\Phi\left(\tfrac{3}{10}\right).$$

По таблице приложения 3 находим $\Phi(0{,}3) = 0{,}1179$. Поэтому

$$P(|X - 20| < 3) = 0{,}2358.$$

Правило трех сигм.

Полагая в выражении (6) $\delta = 3\sigma$, получим $P(|X - a| < 3\sigma) = 2\Phi(3)$.

Но $\Phi(3) = 0{,}49865$ (см. таблицу приложения 3) и, значит,

$$P(|X - a| < 3\sigma) = 0{,}9973. \qquad (7)$$

Формула (7) означает, что событие, состоящее в осуществлении неравенства $|X - a| < 3\sigma$, имеет вероятность, близкую к единице, т. е. является почти достоверным. Эта формула выражает так называемое правило трех сигм: *если случайная величина распределена по нормальному закону, то модуль ее отклонения от математического ожидания не превосходит утроенного среднего квадратического отклонения.*

Нарушение «правила трех сигм», т. е. отклонение нормально распределенной случайной величины X больше, чем на 3σ (по абсолютной величине), является событием практически невозможным, так как его вероятность весьма мала:

$$P(|X - a| > 3\sigma) = 1 - P(|X - a| \le 3\sigma) = 1 - 0{,}9973 = 0{,}0027.$$

В заключение заметим, что нормальное распределение вероятностей имеет в теории вероятностей большое значение. Нормальному закону подчиняется вероятность при стрельбе по цели, его используют в теории погрешностей физических измерений и т. п.

§ 7.11. ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ

1. Неравенство Чебышева.

Лемма. *Пусть X — случайная величина, принимающая только неотрицательные значения, тогда*

$$P(X \ge 1) \le M(X). \qquad (1)$$

Доказательство. Для простоты докажем это утверждение для дискретной величины X, принимающей случайные значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$, при условии $x_i \ge 0$. По теореме сложения вероятностей для несовместимых событий (§ 7.2, п. 1) имеем

$$P\left(X\ge1\right)=\sum_{x_i\ge1}P\left(X=x_i\right),$$

где суммирование распространено на все значения x_i, большие или равные единице. Но для $x_i \ge 1$ очевидно,

$$P(X = x_i) \le x_i P(X = x_i).$$

Поэтому

$$P(X \geq 1) = \sum_{x_i \geq 1} P(X = x_i) \leq \sum_{x_i \geq 1} x_i P(X = x_i). \qquad (2)$$

Добавим к правой части неравенства (2) (сумму $\sum\limits_{x_i<1} x_i P(X = x_i)$, где $x_i < 1$.

Эта сумма неотрицательна, так как $x_i \geq 0$ по условию, а вероятность $P(X = x) \geq 0$. Поэтому

$$\sum_{x_i \geq 1} x_i P(X = x_i) \leq \sum_{x_i \geq 1} x_i P(X = x_i) + \sum_{x_i < 1} x_i P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i). \qquad (3)$$

Последняя сумма распространена на все значения x_i, принимаемые случайной величиной X Следовательно (см. § 7.5, п.1),

$$\sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i) = M(X).$$

Отсюда, сопоставляя соотношения (2) и (3), получаем искомое неравенство (1).

Теорема. *Для любой случайной величины X при каждом положительном числе ε имеет место неравенство*

$$P\left(\left|X - M(X)\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2}. \qquad (4)$$

Неравенство (4) называется *неравенством Чебышева*[1].

Доказательство. Так как событие $|X - M(X)| \geq \varepsilon$ равносильно событию

$$\frac{\left(X - M(X)\right)^2}{\varepsilon^2} \geq 1,$$

то

$$P\left[\left|X - M(X)\right| \geq \varepsilon\right] = P\left[\frac{\left(X - M(X)\right)^2}{\varepsilon^2} \geq 1\right].$$

Случайная величина $[X - M(X)]^2/\varepsilon^2$ неотрицательна, и, значит, согласно лемме, свойству 2 математического ожидания (§ 7.5, п. 2) и определению дисперсии (§ 7.6, п. 1)

$$P\left[\frac{\left(X - M(X)\right)^2}{\varepsilon^2} \geq 1\right] \leq M\left[\frac{\left(X - M(X)\right)^2}{\varepsilon^2}\right] = \frac{1}{\varepsilon^2} M\left[\left(X - M(X)\right)^2\right] = \frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

[1] П.Л. Чебышев (1821—1894) — выдающийся русский математик.

Поэтому

$$P\left[\left|X - M\left(X\right)\right| \geq \varepsilon\right] \leq \frac{D\left(X\right)}{\varepsilon^2}.$$

Пример. Пусть случайная величина X имеет $D(X) = 0{,}001$. Какова вероятность того, что она отличается от $M(X)$ более чем на 0,1?

По неравенству Чебышева

$$P\left[\left|X - M\left(X\right)\right| \geq 0{,}1\right] \leq \frac{D\left(X\right)}{0{,}1^2} = \frac{0{,}001}{0{,}01} = 0{,}1.$$

Примечание. Отметим другую форму неравенства Чебышева. Так как событие, выражаемое неравенством $|X - M(X)| < \varepsilon$ противоположно событию, выражаемому неравенством $|X - M(X)| \geq \varepsilon$, то (§7.2, п. 1, следствие 2)

$$P(|X\text{-}M(X)| < \varepsilon) + P(|X\text{-}M(X)| \geq \varepsilon) = 1.$$

Отсюда с учетом неравенства (4) получаем такую форму неравенства Чебышева:

$$P\left(\left|X - M\left(X\right)\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{D\left(X\right)}{\varepsilon^2}, \qquad (5)$$

2. Закон больших чисел Чебышева. Докажем закон больших чисел в широкой и удобной для практики форме, полученной П.Л. Чебышевым.

Теорема (теорема Чебышева; закон больших чисел). *Если дисперсии независимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ограничены одной и той же постоянной c, $D(X_i) \leq c$, $i = 1, 2, \ldots, n$, то каково бы ни было $\varepsilon > 0$, вероятность выполнения неравенства $|\overline{X} - M(\overline{X})| < \varepsilon$, где $\overline{X} = X_{ср} = (X_1 + X_2 + \ldots + X_n)/n$, будет сколь угодно близка к единице, если число случайных величин n достаточно велико, т. е.*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\overline{X} - M\left(\overline{X}\right)\right| < \varepsilon\right) = 1. \qquad (6)$$

Доказательство. Применяя неравенство Чебышева (5) к величине $\overline{X}$, имеем

$$P\left(\left|\overline{X} - M\left(\overline{X}\right)\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{D\left(\overline{X}\right)}{\varepsilon^2}. \qquad (7)$$

Пользуясь свойствами дисперсии (§ 7.6, п. 2) и условием теоремы, получим

$$D\left(\overline{X}\right) = \frac{1}{n^2}\left[D\left(X_1\right) + \ldots + D\left(X_n\right)\right] \leq \frac{nc}{n^2} = \frac{c}{n}.$$

Отсюда с учетом неравенства (7) и того, что вероятность любого события не превосходит единицы (§7.1,п. 2), получим

$$1 \geq P\left(\left|\overline{X} - M\left(\overline{X}\right)\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{c}{\varepsilon^2 n}. \qquad (8)$$

Наконец, переходя в неравенстве (8) к пределу при $n \to \infty$, приходим к искомому соотношению (6).

Частный случай теоремы Чебышева. *Если все X_k имеют одинаковое математическое ожидание $M(X_1) = \ldots = M(X_n) = a$ и $D(X_k) < c$, $k = 1, \ldots, n$, то*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\overline{X} - a\right| < \varepsilon\right) = 1. \qquad (9)$$

Действительно, в условиях рассматриваемого частного случая равенство (6) имеет вид (9)·

Сущность теоремы Чебышева состоит в следующем. Несмотря на то, что каждая из независимых случайных величин X_k может принять значение, далекое от математического ожидания $M(X_k)$, среднее арифметическое $\overline{X}$ достаточно большого числа случайных величин с большой вероятностью весьма близко к среднему арифметическому их математических ожиданий.

Теорема Чебышева имеет громаднейшее практическое значение. Пусть, например, измеряется некоторая физическая величина. Обычно принимают в качестве искомого значения измеряемой величины среднее арифметическое результатов нескольких измерений. Можно ли считать такой подход верным? Теорема Чебышева (ее частный случай) отвечает на этот вопрос положительно.

На теореме Чебышева основан широко применяемый в статистике выборочный метод, согласно которому по сравнительно небольшой случайной выборке выносят суждение, касающееся всей совокупности исследуемых объектов.

Из теоремы Чебышева (частный случай) следует теорема Бернулли, являющаяся простейшей формой закона больших чисел.

Теорема Бернулли. *Пусть m — число наступлений события A в n независимых испытаниях и p есть вероятность наступления события A в каждом из испытаний. Тогда, каково бы ни было положительное число* ε,

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1. \qquad (10)$$

Доказательство. Обозначим через X_k случайную величину, равную числу наступлений события A в k-м испытании, где $k = 1, 2, \ldots, n$. Тогда имеем (§ 7.7, п. 1)

$$m = X_1 + X_2 + \ldots X_n;$$

$$M(X_k) = p;\; D\left(X_k\right) = pq \leq \frac{1}{4},$$

и все условия частного случая теоремы Чебышева выполнены. Равенство (9) превращается в равенство (10).

Практический смысл теоремы Бернулли следующий: при постоянстве вероятности случайного события A во всех испытаниях при неограниченном возрастании числа испытаний можно с вероятностью, сколь угодно близкой к единице (т. е. как угодно близко к достоверности), утверждать, что наблюдаемая относительная частота случайного события будет как угодно мало отклоняться от его вероятности.

§ 7.12. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

1. Центральная предельная теорема. Как уже отмечалось, нормально распределенные случайные величины имеют широкое распространение на практике. Объяснение этому дает центральная предельная теорема, один из вариантов формулировки которой принадлежит русскому математику А.М. Ляпунову (1857—1918). Суть центральной предельной теоремы состоит в следующем: *если случайная величина X представляет собой сумму очень большого числа независимых случайных величин, влияние каждой из которых на всю сумму ничтожно мало, то X имеет распределение, близкое к нормальному.*

Приведем без доказательства (доказательство см. в работе [13]) центральную предельную теорему для случая одинаково распределенных случайных величин.

Теорема. Е*сли X_1 X_2, ..., X_n — независимые случайные величины, имеющие одно и то же распределение с математическим ожиданием a и дисперсией σ^2, то при неограниченном увеличении n закон распределения суммы $X = X_1 + X_2 + ... + X_n$ неограниченно приближается к нормальному.*

2. Локальная и интегральная предельные теоремы Лапласа.

Если число испытаний n велико, то вычисления по формуле Бернулли становятся затруднительными. Лаплас[1] получил важную приближенную формулу для расчета вероятности $P_n(m)$ появления события A точно m раз, если n — достаточно большое число. Им же получена приближенная формула и для суммы вида $\sum_{m=k}^{l} P_n(m)$.

Локальная предельная теорема Лапласа. *Пусть $p = P(A)$ — вероятность события A, причем $0 < p < 1$. Тогда вероятность того, что в условиях схемы Бернулли событие A при n испытаниях появится точно m раз, выражается приближенной формулой*

[1] Пьер Лаплас (1749—1827) — французский математик, механик и астроном.

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi\left(\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\right), \tag{1}$$

где $q = 1 - p$;

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Для функции $\varphi(x)$ составлена таблица (см. приложение 2) ее значений для положительных значений x [функция $\varphi(x)$ четная]. Выражение (1) называют *формулой Лапласа.*

Пример 1. Вероятность поражения цели стрелком при одиночном выстреле $p = 0{,}2$. Какова вероятность того, что при 100 выстрелах цель будет поражена ровно 20 раз?

Здесь $p = 0{,}2$, $q = 0{,}8$, $n = 100$ и $m = 20$. Отсюда $\sqrt{npq} = \sqrt{100 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8} = 4$

и, следовательно,

$$\frac{m-np}{\sqrt{npq}} = \frac{20-100 \cdot 0{,}2}{4} = 0.$$

Учитывая, что $\varphi(0) = 1/\sqrt{2\pi} \approx 0{,}40$, из формулы (1) получаем

$$P_{100}(20) = 0{,}40 \cdot \frac{1}{4} = 0{,}10.$$

Перейдем к интегральной теореме Лапласа. Поставим следующий вопрос: какова вероятность того, что в условиях. схемы Бернулли событие A, имеющее вероятность $P(A) = p$ $(0 < p < 1)$ при n испытаниях (как и прежде число испытаний велико), появится не менее k раз и не более l раз? Эту искомую вероятность обозначим $P_n(k, l)$.

На основании теоремы сложения вероятностей для несовместимых событий (§ 7.2, п. 1) получим

$$P_n(k,l) = \sum_{m=k}^{l} P_n(m).$$

Справедлива следующая приближенная формула

$$P_n(k,l) \approx \int_{x_k}^{x_l} \varphi(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_k}^{x_l} e^{-\frac{x^2}{2}} dx, \tag{2}$$

где

$$x_k = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}, \; x_l = \frac{l-np}{\sqrt{npq}}. \tag{3}$$

Это составляет содержание интегральной предельной теоремы Лапласа.

Как уже отмечалось (§ 7.10), функция

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \qquad (4)$$

(называемая *функцией Лапласа,* или *интегралом вероятности*) есть первообразная для функции $\varphi(x)$. Поэтому на основании формулы Ньютона — Лейбница из формулы (2) получим

$$P_n(k, l) \approx \Phi(x_l) - \Phi(x_k) \qquad (5)$$

(*интегральная формула Лапласа*).

Однако, интеграл $\left(1/\sqrt{2\pi}\right)\int e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ не берется в элементарных функциях. Поэтому для функции (4) составлена уже использовавшаяся в § 7.10 таблица (см. приложение 3) ее значений для положительных значений x, так как $\Phi(0) = 0$ и функция $\Phi(x)$ нечетная:

$$\Phi(-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{-x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz = -\Phi(x)$$

($t = -z$, $dt = -dz$).

Пример 2. Вероятность того, что изделие не прошло проверку ОТК, $p = 0{,}2$. Найдем вероятность того, что среди 400 случайно отобранных изделий окажутся непроверенными от 70 до 100.

Здесь $n = 400$, $k = 70$, $l = 100$, $p = 0{,}2$, $q = 0{,}8$. Поэтому в силу равенств (3). $x_k = -1{,}25$, $x_l = 2{,}5$ и, согласно формуле (5),

$$P_{400}(70{,}100) \approx \Phi(2{,}5) - \Phi(-1{,}25) \approx 0{,}4938 + 0{,}3944 = 0{,}8882.$$

Замечание. Отметим, что локальную и интегральную предельные теоремы Лапласа иногда еще называют локальной и интегральной предельными теоремами Муавра[1] — Лапласа.

3. Распределение случайных ошибок измерения. Пусть проводится измерение некоторой величины. Разность $x - a$ между результатом измерения x и истинным значением a измеряемой величины называется *ошибкой измерения.* Вследствие воздействия на измерение большого количества факторов, которые невозможно учесть (случайные изменения температуры, колебание прибора, ошибки, возникающие при округлении и т. п.), ошибку измерения можно считать суммой большого числа независимых случайных

[1] Авраам Муавр (1667—1754) — английский математик:

величин, которая (обозначим ее через T) по центральной, предельной теореме должна быть распределена нормально. Если при этом нет систематически действующих факторов (например, неисправности приборов, завышающих при каждом измерении показания), приводящих к систематическим ошибкам, то математическое ожидание случайных ошибок равно нулю.

Значит, плотность вероятности величины T равна

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$$

где σ — среднеквадратическое отклонение величины T.

Результат измерения есть также случайная величина (обозначается через X), связанная с T зависимостью $X = a + T$. Отсюда в силу известных свойств МО и дисперсии (§§ 7.5, 7.6, 7.9) $M(X) = a$, $\sigma(X) = \sigma(T) = \sigma$. При этом X имеет нормальный закон распределения [13].

Заметим, что случайная ошибка измерения, как и результаты измерения, всегда выражаются в некоторых целых единицах, связанных с шагом шкалы измерительного прибора; в теории удобнее считать случайную величину непрерывной случайной величиной, что упрощает расчеты.

7.13. ДВУМЕРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

В различных задачах практики встречаются случайные величины, возможные значения которых определяются не одним числом, а несколькими. Так, при вытачивании на станке цилиндрического бруска его размеры (диаметр основания и высота) являются случайными величинами. Таким образом, здесь мы. имеем дело с совокупностью двух случайных величин. Можно привести примеры, в которых рассматривается совокупность трех и более случайных величин.

Двумерная дискретная случайная величина (X, Y) задается таблицей значений ее составляющих X и Y н вероятностей. Общий вид такой таблицы:

X \ Y	y_1	y_2	…	y_m
x_1	p_{11}	p_{12}	…	p_{1m}
x_2	p_{21}	p_{22}	…	p_{2m}
…	…	…	…	…
x_n	p_{n1}	p_{n2}	…	p_{nm}

Здесь, например, p_{12} есть вероятность того, что двумерная величина примет значение (x_1, y_2).

Указанной таблицей задан закон распределения дискретной двумерной случайной величины.

Непрерывная двумерная случайная величина может аналогично непрерывной одномерной величине определяться дифференциальной функцией $f(x,y)$ (плотностью вероятности двумерной случайной величины).

Аналогично одномерному случаю вводятся понятия математического ожидания $M(X, Y)$, дисперсии $D(X, Y)$ и среднего квадратического отклонения $\sigma(X, Y)$.

Краткое изложение двумерных случайных величин приведено, например, в [4].

Упражнения

1. В ящике имеется 100 яиц, из них 5 некачественных. Наудачу вынимают одно яйцо. Найдите вероятность того, что вынутое яйцо некачественное.

2. Брошена игральная кость. Найдите вероятность того, что выпадет четное число очков.

3. Участники жеребьевки тянут из ящика жетоны с номерами от 1 до 100. Найдите вероятность того, что номер первого наудачу извлеченного жетона не содержит цифры 5.

4. В сосуд емкостью 10 л попала ровно одна болезнетворная бактерия. Какова вероятность зачерпнуть ее при наборе из этого сосуда стакана воды (200. см^3)?

5. В партии из 100 деталей отдел техническое контроля обнаружил 5 нестандартных деталей. Чему равна относительная частота появления нестандартных деталей?

6. При транспортировке из 1000 дынь испортилось 5. Чему равна относительная частота испорченных дынь?

7. При стрельбе по мишени вероятность сделать отличный выстрел равна 0,3, а вероятность выстрела на оценку «хорошо» равна 0,4. Какова вероятность получить за сделанный выстрел оценку не ниже «хорошо»?

8. Вероятность того, что лицо умрет на 71-м году жизни, равна 0,04. Какова вероятность того, что человек не умрет на 71-м году?

9. Бросается один раз игральная кость. Определите вероятность выпадения 3 или 5 очков.

10. В урне 30 шаров: 15 белых, 10 красных и 5 синих. Какова вероятность вынуть цветной шар, если вынимается один шар?

11. В денежно-вещевой лотерее на серию в 1000 билетов приходится 120 денежных и 80 вещевых выигрышей. Какова вероятность какого-либо выигрыша на один лотерейный билет?

12. В урне 3 белых и 3 черных шара. Из урны дважды вынимают по одному шару, не возвращая их обратно. Найдите вероятность появления белого шара при втором испытании, если при первом испытании был извлечен черный шар.

13. В колоде 36 карт. Наудачу вынимают из колоды 2 карты. Определите вероятность того, что вторым вынут туз, если первым тоже вынут туз.

14. В урне 2 белых и 3 черных шара. Из урны вынимают подряд два шара. Найдите вероятность того, что оба шара белые.

15. Какова вероятность того, что из колоды в 36 карт будут вынуты подряд два туза?

16. Два стрелка стреляют по цели. Вероятность поражения цели первым стрелком при одном выстреле равна 0,8, вторым стрелком — 0,7. Найдите вероятность поражения цели двумя пулями в одном залпе.

17. Найдите вероятность одновременного появления герба при одном бросании двух монет.

18. Имеется два ящика, содержащих по 10 деталей. В первом ящике 8, во втором 7 стандартных деталей. Из каждого ящика наудачу вынимают по одной детали. Найдите вероятность того, что все две вынутые детали окажутся стандартными.

19. В семье двое детей. Принимая события, состоящие в рождении мальчика и девочки равновероятными, найдите вероятность того, что в семье: а) все девочки; б) дети одного пола.

20. Пусть всхожесть семян оценивается вероятностью 0,7. Какова вероятность того, что из двух посеянных семян взойдет какое-либо одно?

21. Из колоды в 36 карт наудачу вынимается одна. Какова вероятность того, что будет вынута пика или туз?

22. Брошена игральная кость. Найдите вероятность того, что выпадет четное или кратное трем число очков.

23. Имеется два набора деталей. Вероятность того, что деталь первого набора стандартна, равна 0,8, а второго — 0,9. Найдите вероятность того, что взятая наудачу деталь (из наудачу взятого набора) — стандартная.

24. В первой коробке содержится 20 радиоламп, из них 18 стандартных; во второй коробке — 10 ламп, из них 9 стандартных. Из второй коробки наудачу взята лампа и переложена в первую. Найдите вероятность того, что лампа, наудачу извлеченная из первой коробки, будет стандартной.

25. Студент M может заболеть гриппом (событие A) только в результате либо переохлаждения (событие B), либо контакта с другим больным (событие С). Требуется найти $P(A)$, если $P(B) = 0{,}5$, $P(C) = 0{,}5$, $P_B(A) = 0{,}3$, $P_C(A) = 0{,}1$ при условии несовместимости B и C.

26. В коробке находятся 6 новых и 2 израсходованные батарейки для карманного фонарика. Какова вероятность того, что две вынутые из коробки наудачу батарейки окажутся новыми?

27. На трех карточках написаны буквы У, К, Ж. После тщательного перемешивания берут по одной карточке и кладут последовательно рядом. Какова вероятность того, что получится слово «ЖУК»?

28. Слово «керамзит» составлено из букв разрезной азбуки. Затем карточки с буквами перемешиваются, и из них извлекаются по очереди четыре карточки. Какова вероятность, что эти четыре карточки в порядке выхода составят слово «река»?

29. Пусть случайная величина X — число очков, выпавших при однократном бросании игральной кости. Найдите закон распределения случайной величины X.

30. В денежной лотерее выпущено 100 билетов. Разыгрывается 1 выигрыш в 5000 р. и 10 выигрышей по 100 р. Найдите закон распределения случайного выигрыша X для владельца одного лотерейного билета.

31. Закон распределения случайной величины X задан таблицей:

X	1	2	3
P	0,3	0,2	0,5

Найдите математическое ожидание X.

32. Найдите математическое ожидание выигрыша X в упражнении 30.

33. Найдите математическое ожидание случайной величины X, зная закон ее распределения:

X	2	3	5
p	0,3	0,1	0,6

34. Производятся два выстрела с вероятностями попадания в цель, равными $p_1 = 0{,}4$, $p_2 = 0{,}3$. Найдите математическое ожидание общего числа попаданий.

35. Найдите математическое ожидание суммы числа очков, которые могут выпасть при одном бросании двух игральных костей.

36. Найдите математическое ожидание произведения числа очков, которые могут выпасть при одном бросании двух игральных костей.

37. Независимые случайные величины X и Y заданы следующими законами распределения:

X	2	4	5
p	0,1	0,3	0,6

и

Y	7	9
p	0,8	0,2

Найдите математическое ожидание случайной величины XY.

38. Найдите дисперсию случайной величины X, которая задана следующим законом распределения:

X	1	2	5
p	0,3	0,5	0,2

39. Известны дисперсии двух независимых случайных величин X, Y: $D(X) = 4$, $D(Y) = 3$. Найдите дисперсию суммы этих величин.

40 Дисперсия случайной величины X равна 5. Найдите дисперсию следующих величин: а) $X - 1$; б) $-2X$; в) $3X + 6$.

Найдите математические ожидания и дисперсии случайных величин:

41.

X	-2	-1	0	1	2
p	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

42.

X	1	3	4	6	7
p	0,1	0,1	0,3	0,4	0,1

43.

X	5	7	10	15
p	0,2	0,5	0,2	0,1

44. К случайной величине прибавили постоянную a. Как при этом изменится ее: а) математическое ожидание; б) дисперсия?

45. Случайную величину умножили на a. Как при этом изменятся: а) математическое ожидание; б) дисперсия?

46. Случайная величина X принимает только два значения: 1 и – 1. Каждое с вероятностью 0,5. Найдите дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$.

47. Дисперсия случайной величины $D(X) = 6{,}25$. Найдите среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$.

48. Пусть закон распределения случайной величины X задан таблицей:

X	4	10	20
p	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Определите математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$.

49. Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

X	3	5
p	0,2	0,8

Найдите начальные моменты первого и второго порядков.

50. Дискретная случайная величина X задана законом распределения, приведенным в предыдущем примере. Найдите центральный момент второго порядка.

51. В хлопке 75% длинных волокон. Какова вероятность того, что среди взятых наудачу трех волокон окажутся два длинных волокна?

52. При некоторых условиях стрельбы вероятность попадания в цель равна $\frac{1}{3}$. Производится 6 выстрелов. Какова вероятность в точности двух попаданий?

53. Игральная кость бросается 5 раз. Найдите вероятность того, что два раза появится число очков, кратное трем.

54. Монета подбрасывается 5 раз. Какова вероятность того, что герб появится не менее двух раз?

55. Пусть всхожесть семян данного растения составляет 80%. Найдите вероятность того, что из 3 посеянных семян взойдут: а) два; б) не менее двух.

56. В семье 5 детей. Найдите вероятность того, что среди этих детей два мальчика. Вероятность рождения мальчика принять равной 0,51.

57. По мишени производится 3 выстрела, причем вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,8. Рассматривается случайная величина X — число попаданий в мишень.

Найдите закон ее распределения.

58. Принимая вероятности рождения мальчика и девочки одинаковыми, найдите вероятность того, что среди четырех новорожденных два мальчика.

59. Вероятность попадания в цель при стрельбе из орудия $p = 0,6$. Найдите математическое ожидание общего числа попаданий, если будет произведено 10 выстрелов.

60. Найдите математическое ожидание числа лотерейных билетов, на которые выпадут выигрыши, если приобретено 20 билетов, причем вероятность выигрыша по одному билету равна 0,3.

61. Найдите дисперсию случайной величины X — числа появлений события A в 100 независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность наступления события A равна 0,7.

62. Найдите: а) математическое ожидание и б) дисперсию числа бракованных изделий в партии из 5000 изделий, если каждое изделие может оказаться бракованным с вероятностью 0,02.

63. Производится 10 независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A равна 0,6. Найдите дисперсию случайной величины X — числа появлений события A в этих испытаниях.

64. Найдите дисперсию случайной величины X — числа появлений события A в двух независимых испытаниях, если $M(X) = 0{,}8$.

65. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le -1;\\ \frac{x}{3}+\frac{1}{3} \text{ при } -1<x\le 2;\\ 1 \text{ при } x>2.\end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале (0; 1).

66. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le 2;\\ \frac{x}{2}-1 \text{ при } 2<x\le 4;\\ 1 \text{ при } x>4.\end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале (2; 3).

67. Дана дифференциальная функция непрерывной случайной величины X

$$f(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le 0;\\ \cos x \text{ при } 0<x\le \frac{\pi}{2};\\ 0 \text{ при } x>\frac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Найти интегральную функцию распределения $F(x)$.

68. Функция

$$f(x)=\frac{2A}{e^{x}+e^{-x}}\left(-\infty<x<+\infty\right)$$

является плотностью вероятности случайной величины X. Найти коэффициент A и функцию распределения $F(x)$.

69. Найти математическое ожидание случайной величины X, заданной плотностью вероятности

$$f(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le 0;\\ \frac{1}{4} \text{ при } 0<x\le 4;\\ 0 \text{ при } x>4.\end{cases}$$

70. Случайная величина X задана плотностью вероятности

$$f(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le 0;\\ 1 \text{ при } 0<x\le 1;\\ 0 \text{ при } x>1.\end{cases}$$

Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X.

71. Рост взрослой женщины является случайной величиной, распределенной по нормальному закону с параметрами: a = 164 см, σ = 5,5 см. Найти плотность вероятности этой величины.

72. Пусть масса пойманной рыбы подчиняется нормальному закону с параметрами: a = 375 т; σ = 25 г. Найти вероятность того, что масса пойманной рыбы будет от 300 до 425 г.

73. Случайная величина X распределена по нормальному закону. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение этой величины соответственно равны 0 и 2. Найти вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу (–2; 3).

74. При выработке некоторой массовой продукции вероятность появления одного нестандартного изделия составляет 0,01. Какова вероятность того, что в партии из 100 изделий этой продукции 2 изделия будут нестандартными?

75. На завод, прибыла партия деталей в количестве 1000 шт. Вероятность того, что одна деталь окажется бракованной, равна 0,001. Какова вероятность, того, что среди прибывших деталей будет 5 бракованных?

76. Игральную кость бросают 80 раз. Определить вероятность того, что цифра 3 появится 20 раз.

77. При установившемся технологическом режиме завод выпускает в среднем 70% продукции первого сорта. Определить вероятность того, что из 1000 изделий число первосортных заключено между 652 и 760.

ГЛАВА 8.
ОБРАБОТКА СТАТИСТИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ

§8.1. ИЗМЕРЕНИЕ

1. Способ измерений. Измерение – это процедура, с помощью которой измеряемый объект сравнивается с некоторым эталоном и получает численное выражение в определённом масштабе или шкале.

Закодированная в числовой форме информация позволяет использовать математические методы и выявлять то, что без обращения к числовой интерпретации могло бы остаться скрытым; кроме того, числовое представление объектов или событий позволяет оперировать сложными понятиями в более сокращенной форме. Это и является причиной использования измерении в любой науке в том числе, педагогике и психологии.

Любой вид измерения предполагает наличие единиц измерения. В естественных науках и технике существуют стандартные единицы измерения, например, градус, метр, ампер и т.д. Вместе с тем, например, в большинстве случаев значение психологического признака определяется при помощи специальных измерительных шкал.

Существует четыре типа измерительных шкал или способов измерения (см., например [11]):

1) номинативная, номинальная или шкала наименований;
2) порядковая, одинарная или ранговая шкала;
3) интервальная или шкала равных интервалов;
4) шкала равных отношений, или шкала отношений.

Измерения, осуществляемые с помощью двух первых шкал, считаются качественными, а осуществляемые с помощью двух последних шкал — количественными.

2. Номинативная шкала. Измерение в номинативной шкале состоит в присваивании какому-то свойству или признаку определённого обозначения или символа (численного, буквенного и т.п.). Процесс измерения сводится к классификации свойств, группировке объектов, к объединению их в группы при условии, что объекты, принадлежащие к одной группе идентичны (или аналогичны) друг другу в отношении какого-либо признака или свойства, тогда как объекты, различающиеся по этому признаку, попадают в разные группы.

Классический пример измерения по номинативной шкале в психологии — разбиение людей по четырем темпераментам: сангвиник, холерик, флегматик и меланхолик.

Номинальная шкала определяет, что разные свойства или признаки качественно отличаются друг от друга, но не подразумевает каких-либо количественных операций с ними. Так, для признаков, измеренных по этой шкале, нельзя сказать, что какой-то из них больше, а какой-то меньше, какой-то лучше, а какой-то хуже. Можно лишь утверждать, что признаки, попавшие в разные группы, различны.

Самая простая номинативная шкала называется дихотомической. При измерениях по этой шкале измеряемые признаки можно кодировать двумя символами или цифрами, например, 0 и 1, или 2 и 6, или буквами А и Б, а также любыми двумя отличающимися друг от друга символами. Признак, измеренный по дихотомической шкале, называется альтернативным.

3. Порядковая шкала. В порядковой шкале все признаки располагаются по рангу — от самого большого (высокого, сильного, умного и т.п.) до самого маленького (низкого слабого, глупого и т.п.) или наоборот.

Примеры порядковой шкалы.

Школьные оценки от 5 до 1 балла.

Судейство в некоторых видах спорта или зрелищных программах (КВН, ДОГШОУ и т.п.)

Психолог изучает группу спортсменов, имеющих градацию званий: мастер спорта, кандидат в мастера спорта и перворазрядник. Здесь удобно каждую отдельную группу обозначить собственным символом 1,2 и 3. (или наоборот – 3, 2 и 1) или другими символами, например, А, Б и В (или наоборот — В, Б, А). При этом на основе этих символов можно сказать, что представитель первой группы имеет более высокую спортивную квалификацию, чем представители двух других.

В порядковой шкале должно быть не меньше трех групп: например, ответы на опросник: «да», «не знаю», «нет»; или «низкий», «средний», «высокий»; и т.п., с тем расчетом, чтобы можно было расставить измеренные признаки по порядку.

От групп можно перейти к числам, если считать, что низшая группа получает ранг (код или цифру) 1, средняя — 2, высшая — 3 (или наоборот).

При кодировании (ранжировании) порядковых переменных им можно приписывать любые цифры (коды), но в этих кодах обязательно должен сохраняться порядок, т.е. каждая последующая цифра должна быть больше (или меньше) предыдущей.

Например, пусть нужно закодировать уровень агрессивности по пяти градациям. Это можно сделать самыми разными способами, представленными в таблице ([11]).

Градация	Код	Градация	Код	Градация	Код	Градация	Код
Самый низкий	1	Самый низкий	14	Самый низкий	99	Самый низкий	1
Низкий	3	Низкий	23	Низкий	77	Низкий	2
Средний	6	Средний	34	Средний	55	Средний	3
Высокий	10	Высокий	56	Высокий	33	Высокий	4
Самый высокий	15	Самый высокий	199	Самый высокий	11	Самый высокий	5

Каждый из вариантов правильный, но последний, как наиболее привычный, наиболее предпочтительный.

Из этого примера видно, что интервалы в ранговой шкале не равны между собой (например, первый столбец: 3 – 1 = 2, 6 – 3 = 3, 10 – 6 = 4, 15 – 10 = 5). Отсюда числа в порядковой шкале лишь порядок следования, а операции с ними – это операции с рангами.

Правила ранжирования.

Пример [11]. Испытуемому предлагается задание, в котором семь личностных качеств необходимо проранжировать в двух столбцах: левом столбце в соответствии с особенностями его «Я реального», а в правом столбце, в соответствии с особенностями: «Я идеального».

Результаты ранжирования даны в этой таблице:

Я реальное	Качества личности	Я идеальное
7	Ответственность	1
1	Общительность	5
3	Настойчивость	7
2	Энергичность	6
5	Жизнерадостность	4
4	Терпеливость	3
6	Решительность	2

Ранжирование в любом столбце осуществляется следующим образом: так как всего имеется 7 качеств, то максимальный ранг 7 присваивается качеству, наиболее значимому на данный момент времени. А минимальный 1 — наименее значимому. Остальным качествам, в соответствии со степенью их значимости приписываются цифры (ранги) от 6 до 2.

В правом столбце проводится ранжирование в соответствии с тем, какими качествами человек хотел бы обладать в идеале. Максимально желаемому ставится в соответствие наибольший ранг и так далее, причем наименее желаемым ставятся наименьшие величины рангов.

Таким образом, процесс ранжирования является формальным. Поэтому в зависимости от предпочтения можно проставлять величины рангов и в противоположном порядке.

Ранжировать можно не только качественные признаки, но и количественные признаки какого-либо измеренного свойства. Например, в результате экспресс диагностики невроза у пяти испытуемых были получены следующие баллы:

24, 25, 37, 13, 12.

Этому ряду чисел можно поставить ранги двумя способами:

1. Большему числу в ряду ставится больший ранг — в этом случае получится: 3, 4, 5, 2, 1.

2. Большему числу в ряду ставится меньший ранг — в этом случае получится: 3, 2, 1, 4,5.

Проверка правильности ранжирования.

В наиболее общем случае для проверки правильности ранжирования столбца, (или строки) признаков используется следующее предложение: Если ранжируется N признаков, то сумма всех полученных рангов должна быть равна

$$1+2+3+\ldots+N=\frac{N(N+1)}{2}. \quad (1)$$

Это известная формула суммы членов арифметической прогрессии.

Существует еще и несколько других вариантов ранжирования.

Совпадение итогов подсчета рангов по формуле (1) и реальным результатам ранжирования экспериментальных данных является подтверждением правильности ранжирования.

Случай одинаковых рангов.

При выставлении экспертных оценок или в других случаях ранжирования возникают ситуации, когда двум или большему числу качеств приписываются одинаковые ранги. Рассмотрим такой случай применительно к примеру, в котором ранжировались семь личностных качеств.

Я реальное		Качества личности
7	7	Ответственность
1	1	Общительность
(3)	2,5	Настойчивость
(2)	2,5	Энергичность
5	5	Жизнерадостность

Окончание таблицы

Я реальное		Качества личности
4	4	Терпеливость
6	6	Решительность

Предположим, что при оценке особенностей «Я реального» испытуемый считает, что такие качества как «настойчивость» и «энергичность» должны иметь один и тот же ранг. Тогда при проведении ранжирования (разбить предворительно первый столбец на два — первый и второй) этим качествам необходимо проставить в первом столбце условные ранги, идущие по порядку друг за другом, и отметить круглыми скобками — (). Однако, поскольку эти качества, по мнению испытуемого, должны иметь одинаковые ранги, во втором столбце таблицы, относящемуся к «Я реальному» следует поместить среднее арифметическое рангов, проставленных в скобках, т. е. $\frac{2+3}{2}=2{,}5$. Таким образом, второй столбец новой таблицы и будет окончательным итогом ранжирования особенностей «Я реального» данного испытуемого.

Проверим правильность ранжирования. Складываем реальные ранги, полученные во втором столбце таблицы: 7 + 1 + 2,5 + 2,5 + 5 + 4 + 6 = 28.

С другой стороны, по формуле (1) сумма рангов также равна 28. Значит, ранжирование проведено правильно.

4. Интервальная шкала. В интервальной шкале каждое из возможных значений измеренных величин отстоит от ближайшего на равном расстоянии. Основное её понятие — интервал, который рассматривается как доля или часть измеряемого свойства между двумя соседними позициями на шкале. Его размер — фиксированная величина на всех участках шкалы. Для измерения посредством шкалы интервалов устанавливаются специальные единицы измерения; в психологии — это стены и стенайны. При работе с этой шкалой измеряемому свойству или предмету присваивается число, равное количеству единиц измерения, эквивалентное количеству имеющегося свойства.

Заметим, что шкала интервалов не содержит естественной точки отчета (нуль условен и не указывает на отсутствие измеряемого свойства).

5 Шкала отношений. Особенностью шкалы отношений (её называют также шкалой равных отношений) является наличие твердо фиксированного нуля, который означает полное отсутствие какого-либо свойства или признака. Она является наиболее информативной, допускающей любые математические операции и использование разнообразных статистических методов. При этом шкала отношений очень близка интервальной, поскольку если строго фиксировать начало отсчета, то интервальная шкала превращается в шкалу отношений.

В шкале отношений производятся точные и сверхточные измерения в таких науках, как физика, химия, микробиология и др. Измерения по шкале отношений производятся и в близких к психологии науках, таких, как психофизика, психофизиология и психогенетика.

§ 8.2. ГЕНЕРАЛЬНАЯ СОВОКУПНОСТЬ И ВЫБОРКА

Пусть требуется изучить множество однородных объектов (это множество называют *статистической совокупностью*) относительно некоторого качественного или количественного признака характеризующего эти объекты.

Лучше всего осуществить сплошное обследование, т. е. изучить каждый объект. Однако в большинстве случаев по разным причинам это сделать невозможно. Препятствовать сплошному обследованию может большое число объектов, их недоступность и т. п. Если, например, нужно знать среднюю глубину воронки при взрыве снаряда из опытной партии, то, проводя сплошное обследование, мы должны будем уничтожить всю партию.

Если сплошное обследование невозможно, то из всей совокупности выбирают для изучения часть объектов.

Статистическая совокупность, подлежащая для изучения называется *генеральной совокупностью.* Множество объектов, случайно отобранных из генеральной совокупности, называется *выборочной совокупностью*, или выборкой.

Число объектов генеральной совокупности и выборки называется соответственно *объемом генеральной совокупности* и *объемом выборки.*

Пример. Плоды одного дерева (200 шт.) обследуют на наличие специфического для данного сорта вкуса. Для этого отбирают 10 шт. Здесь 200 — объем генеральной совокупности, а 10 — объем выборки.

Если выборку отбирают по одному объекту, который обследуют и снова возвращают в генеральную совокупность, то выборка называется *повторной*. Если объекты выборки уже не возвращаются в генеральную совокупность, то выборка называется *бесповторной.* На практике чаще используется бесповторная выборка. Если объем выборки составляет небольшую долю объема генеральной совокупности, то разница между повторной и бесповторной выборками незначительна.

Свойства объектов выборки должны правильно отражать свойства объектов генеральной совокупности, или, как говорят, выборка должна быть *репрезентативной* (представительной). Считается, что выборка репрезентативна, если все объекты генеральной совокупности имеют одинаковую вероятность попасть в выборку, т. е. выбор осуществляется случайно. Например, для того чтобы оценить будущий урожай, можно сделать выборку из генеральной совокупности еще не созревших плодов и исследовать их характеристики (массу, качество и пр.). Если вся выборка будет взята с одного дерева, то она не будет репрезентативной. Репрезентативная выборка должна состоять из случайно выбранных плодов со случайно выбранных деревьев.

§ 8.3. УЧЕТ РЕЗУЛЬТАТОВ НАБЛЮДЕНИЙ

Для наглядного представления экспериментальных данных используются таблицы, ряды распределений, графики, гистограммы.

1. Таблицы. Первичный экспериментальный материал нуждается в соответствующей обработке (упорядочении, систематизации собранных данных). Процесс систематизации результатов эксперимента, объединение их в относительно однородные группы по некоторому признаку называется *группировкой*.

Таблицы — наиболее распространённая форма группировки экспериментальных данных. Таблицы делятся на простые и сложные. Простые таблицы применяются при альтернативной группировке (здоровые — больные, люди высокие — низкие и т.п.). Смотри также таблицу, из которой видно, что леворукие ученики чаще встречаются среди учащихся 5 и 6 классов, чем среди 3 и 4 классов [11]. Простые таблицы рекомендуется использовать при измерении признаков в номинативной или ранговой шкале.

Классы	Праворукие	Леворукие	Сумма
3 и 4	43	6	49
5 и 6	44	17	61
Сумма	87	23	110

Примером сложной таблицы является таблица 3.3, где представлены классические данные Ф. Гальтона [11], иллюстрирующие наличие положительной зависимости между ростом родителей и их детей. Из этой таблицы видно, что у высоких родителей, дети, как правило, имеют высокий рост, а у низкорослых родителей чаще бывают дети невысокого роста.

Рост родителей	Рост детей в дюймах								Всего
	60, 7	62,7	64,7	66,7	68,7	70,7	72,7	74,7	
74							4		4
72			1	4	11	17	20	6	62

Окончание таблицы

Рост родителей	Рост детей в дюймах								Всего
	60, 7	62,7	64,7	66,7	68,7	70,7	72,7	74,7	
70	1	2	21	48	83	66	22	8	251
68	1	15	56	130	148	69	11		430
66	1	15	19	56	41	11	1		144
64	2	7	10	14	4				37
Всего	5	39	107	255	387	163	58	14	928

2. Статистическое распределение выборки. При изучении некоторого признака X (случайной величины) выборочной совокупности получены следующие числовые значения $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, ..., $x^{(n)}$ (называемые *вариантами*), где n — *объем* выборки. Расположив эти значения в порядке неубывания (такая операция называется *ранжированием*) получим $x_1, x_2, ..., x_n$ $(x_1 \le x_2 \le ... \le x_n)$. Эта последовательность называется *дискретным вариационным рядом*. Среди вариант могут оказаться равные, тогда этот ряд можно записать в виде

$$\begin{array}{l} x_1, x_2, ..., x_k \\ n_1, n_2, ..., n_k \\ \left(n_1 + n_2 + ... + n_k = n\right) \end{array} \quad \text{или} \quad \begin{array}{l} x_1, x_2, ..., x_k \\ p_1^*, p_2^*, ..., p_k^* \end{array},$$

где n_i и $p_i^* = n_i/n$ — соответственно частота и относительная частота (частность) появления значения x_i $(i = 1, 2, ..., k)$. При этом сумма частностей равно единице. Действительно, имеем:

$$p_1^* + p_2^* + ... + p_k^* = \frac{n_1}{n} + \frac{n_2}{n} + ... + \frac{n_k}{n} = \frac{n_1 + n_2 + ... + n_k}{n} = \frac{n}{n} = 1 .$$

Перечень вариант и соответствующих им частот или частностей называется *статистическим распределением выборки* или *дискретным статистическим рядом*. Оно может быть задано и с помощью таблицы:

x_i	x_1	x_2	…	x_k
n_i	n_1	n_2	…	n_k

или

x_i	x_1	x_2	…	x_k
p_i^*	p_1^*	p_2^*	…	p_k^*

Пример. В результате тестирования группа абитуриентов набрала баллы: 5, 3, 0, 1, 4, 2, 5, 4, 1, 5. Записать полученную выборку в виде: а) вариационного ряда, б) статистического ряда.

а) Проранжировав статистические данные (т.е. исходный ряд), получим . вариационный ряд: 0, 1, 1, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 5.

б) Подсчитав частоту и частность вариантов $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$, $x_5 = 4$, $x_6 = 5$ получим статистическое распределение выборки:

x_i	0	1	2	3	4	5
n_i	1	2	1	1	2	3

или

X_i	0	1	2	3	4	5
p_i^*	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$

В случае, когда число значений признака (случайной величины X) велико или признак является непрерывным (т.е. когда случайная величина X может принять любое значение в некотором интервале), составляют интервальный статистический ряд. В первую строку таблицы статистического распределения вписывают частичные промежутки $[x_0, x_1)$, $[x_1, x_2)$, …, $[x_{k-i}, x_k)$, которые берут обычно одинаковыми по длине $h = x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = ... = x_k - x_{k-1}$. Для определения h можно использовать формулу Стерджеса (см., например, [12]):

$$h = \frac{x_{max} - x_{min}}{1+\log_2 n},$$

где $x_{max} - x_{min}$ — разность между наибольшим и наименьшим значением признака, $m = 1 + \log_2 n$ — число интервалов ($\log_2 n \approx 3{,}322\lg n$).

За начало первого промежутка рекомендуется брать величину $x_{\text{нач}} = x_{min} - \frac{h}{2}$. Во второй строчке статистического ряда вписывают количество наблюдений n_i ($i = 1,2,..., k$), попавших в каждый промежуток.

Пример 2. Измерим рост (с точностью до см) 30 на удачу отобранных студентов. Результаты измерений таковы: 178, 161, 154, 183, 155, 153, 167, 186, 162, 155, 157, 175, 170, 166, 159,173, 181, 167, 171,169, 179, 165,156, 179, 158, 171, 175, 173, 164, 172. Постройте интервальный статистический ряд.

Решение. Для удобства проранжируем полученные данные: 153, 154, 155, 155, 156, 157, 158, 159, 161, 162, 164, 165, 166, 167, 167, 169, 170, 171, 171, 172, 173, 173, 175, 175, 178, 179,179,181,183,186.

Заметим, что X — рост студента — непрерывная случайная величина. При более точном измерении роста значение случайной величины X обычно не повторяются (вероятность наличия на Земле двух человек, рост которых равен, скажем, $\sqrt{3} = 1{,}732050808...$ метров, равна нулю).

Как видим, $x_{min} = 153$, $x_{max} = 186$; по формуле Стерджеса, при $n = 30$, находим длину частичного промежутка

$$h = \frac{186-153}{1+\log_2 30} \approx \frac{33}{1+3{,}322\lg 30} \approx \frac{33}{5{,}907} \approx 5{,}59\,.$$

Примем $h = 6$, тогда $x_{\text{нач}} = 153 - \frac{6}{2} = 150.$

Исходные данные разбиваем на 6 промежутков [150,156), [156, 162), [162,168), [168, 174), [174,180), [180,186). Подсчитав число студентов (n_i), попавших в каждый из полученных промежутков, получим интервальный статистический ряд

Рост	[150, 156)	[156, 162)	[162, 168)	[168, 174)	[174, 180)	[180, 186)
Частота	4	5	6	7	5	3
Частность	0,13	0,17	0,20	0,23	0,17	0,10

Данные статистического ряда можно использовать для построения статистической (эмпирической) функции распределения.

3. Эмпирическая функция распределения. Одним из способов обработки вариационного ряда является построение эмпирической функции распределения. *Эмпирической* (статистической) *функцией распределения*, или *функцией распределения выборки*, называется функция $F^*_n(x)$, определяющая для каждого значения x частность события $\{X < x\}$: $F_n^*\left(x\right)=\frac{n_x}{n}$, где n — объем выборки, n_x — число наблюдений, меньших x.

Функцию $F(x)$ распределения генеральной совокупности в отличие от эмпирической функции $F^*(x)$ распределения выборки, называют *теоретической функцией распределения*. Различие между ними состоит в том, что первая определяет вероятность события $X < x$, вторая — относительную частоту того же события.

$F^*(x)$ удовлетворяет тем же условиям, что и теоретическая функция $F(x)$:

1) Значение эмпирической функции принадлежит отрезку [0, 1];

2) $F^*(x)$ — неубывающая функция;

3) Если x_1 — наименьшая варианта, то $F^*(x) = 0$ при $x \le x_1$; если x_k — наибольшая варианта, то $F^*(x) = 1$ при $x > x_k$.

При увеличении наблюдений (опытов) частность события $\{X < x\}$ приближается к вероятности этого события (теорема Бернулли § 7.11, п. 2). Поэтому функция $F^*(x)$ является оценкой функции $F(x)$.

Пример. Найдите эмпирическую функцию по данному распределению выборки

Варианты x_i	6	8	12	15
Частоты n_i	2	3	10	5

Объем выборки $n=\sum_{i=1}^{4} n_i = 2+3+10+5=20$. Наименьшая варианта $x_1 = 6$, поэтому $F^*(x) = 0$, если $x \le 6$. Значение $X < 8$, т.е. $x_1 = 6$, наблюдалось 2 раза, поэтому $F^*\left(x\right)=\frac{2}{20}=0{,}1$, если $6 < x \le 8$.

Значения $X < 12$, т.е. $x_1 = 6, x_2 = 8$, наблюдались $2 + 3 = 5$ раз, поэтому $F^*(x) = \frac{5}{20} = 0{,}25$, если $8 < x < 12$.

Значения $X < 15$, т.е. $x_1 = 6, x_2 = 8, x_3 = 12$, наблюдались $2 + 3 + 10 = 15$ раз, поэтому $F^*(x) = \frac{15}{20} = 0{,}75$ если $12 < x \leq 15$. Поскольку $x_4 = 15$ — наибольшая варианта, то $F(x) = 1$, если $x > 15$.

Итак, искомая эмпирическая функция определяется формулами

$$F^*(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \leq 6, \\ 0{,}1 \text{ при } 6 < x \leq 8, \\ 0{,}25 \text{ при } 8 < x \leq 12, \\ 0{,}75 \text{ при } 12 < x \leq 15, \\ 1 \text{ при } x > 15. \end{cases}$$

График этой функции изображен на рисунке 45.

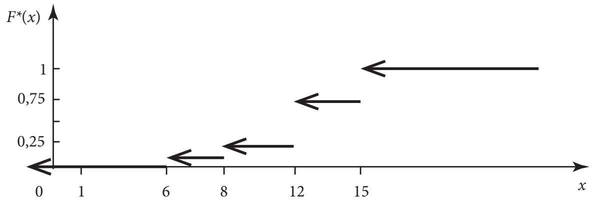


Рис 45

4. Графическое изображение статистического распределения.

Для графического изображения статистического распределения используются *полигоны* и *гистограммы.*

Для построения полигона в декартовых координатах на оси Ox откладывают значения вариант x_i, на оси Oy — значения частот n_i (относительных частот p_i^*).

Пример 1. Рис. 46 представляет собой полигон следующего распределения:

Варианта x_i	1	2	3	5
Относительная частота p_i^*	0,4	0,2	0,3	0,1

Полигоном обычно пользуются в случае небольшого количества вариант. В случае большого количества вариант и в случае непрерывного распределения признака чаще строят гистограммы. Для этого интервал, в котором заключены все наблюдаемые значения признака, разбивают на несколько частичных интервалов шириной h и находят для каждого частичного интервала n_i — сумму частот вариант, попавших в i-й интервал.

Затем на этих интервалах как на основаниях строят прямоугольники с высотами $\frac{n_i}{h}$ (или $\frac{n_i}{nh}$, где n — объем выборки). Площадь i-го частичного прямоугольника равна $\frac{hn_i}{h} = n_i$ (или $\frac{hn_i}{nh} = \frac{n_i}{n} = p_i^*$). Следовательно, площадь гистограммы равна сумме всех частот (или относительных частот), т. е. объему выборки (или единице).

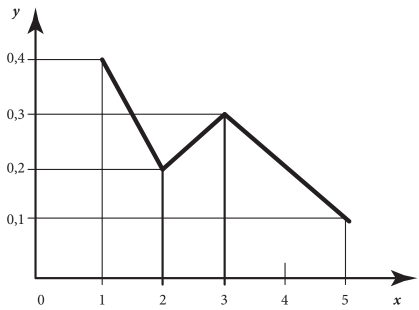


Рис 46

П р и м е р 3. Рис. 47 показывает гистограмму непрерывного распределения объема $n = 100$, заданного следующей таблицей:

Частичный интервал, h	Сумма частот вариант частичного интервала, n_i	$\frac{n_i}{h}$
5-10	4	0,8
10-15	6	1,2
15-20	16	3,2
20-25	36	7,2
25-30	24	4,8
30-35	10	2,0
35-40	4	0,8

Кроме гистограммы (или столбчатой диаграммы), существуют еще круговые диаграммы. Такая диаграмма представляет собой круг, разрезанный на дольки, каждая из которых соответствует одному из значений изучаемого признака, а ее размер пропорционален интересующей величине.

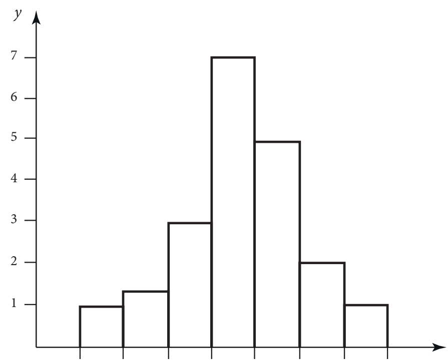


Рис 47

Пример 4. Получены следующие данные об урожайности ржи в совхозе

Урожайность, ц/га	Число гектаров
18	77
20	49
21	34

Постройте по этой информации круговую диаграмму

Решение. Имеем

Рис 48

§8.4. ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ ГЕНЕРАЛЬНОЙ СОВОКУПНОСТИ ПО ЕЕ ВЫБОРКЕ

1. Выборка как набор случайных величин. Пусть имеется некоторая генеральная совокупность, каждый объект которой наделен количественным признаком X. При случайном извлечении объекта из генеральной совокупности становится известным значение x признака X этого объекта. Таким образом, мы можем рассматривать извлечение объекта из генеральной совокупности как испытание, X— как случайную величину, а x — как одно из возможных значений X.

Допустим, что из теоретических соображений удалось установить, к какому типу распределений относится признак X. Естественно, возникает задача оценки (приближенного определения) параметров, которыми описывается это распределение. Например, если известно, что изучаемый признак распределен в генеральной совокупности нормально, то необходимо оценить, т. е. приближенно найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение, так как эти два параметра полностью определяют нормальное распределение.

Обычно в распоряжении исследователя имеются лишь данные выборки генеральной совокупности, например, значения количественного признака x_1, x_2, ..., x_n, полученные в результате n наблюдений (здесь и далее наблюдения предполагаются независимыми). Через эти данные и выражают оцениваемый параметр.

Опытные значения признака X можно рассматривать и как значения разных случайных величин X_1 X_2, ..., X_n с тем же распределением, что и X, и, следовательно, с теми же числовыми характеристиками, которые имеет X. Значит, $M(X_i) = M(X)$, $D(X_i) = D(X)$ $(i = 1, ,2, ..., n)$. Величины X_1, X_2, ..., X_n можно считать независимыми в силу независимости наблюдений. Значения x_1 x_2, ..., x_n в этом случае называются *реализациями* случайных величин X_1, X_2, ..., X_n. Отсюда и из предыдущего следует, что найти оценку неизвестного параметра — это значит найти функцию от наблюдаемых случайных величин X_1, X_2, ..., X_n, которая и дает приближенное значение оцениваемого параметра.

2. Генеральная и выборочная средние. Методы их расчета. Пусть изучается дискретная генеральная совокупность объема N относительно количественного признака X.

Определение 1. *Генеральной средней* $\bar{x}_г$ (или a) называется среднее арифметическое значений признака X генеральной совокупности.

Если все значения x_1, x_2, ..., x_N признака генеральной совокупности объема N различны, то

$$\bar{x}_г = \frac{1}{N}\left(x_1 + x_2 + ... + x_N\right).$$

Если же значения признака x_1, x_2, ..., x_k имеют соответственно частоты N_1, N_2, ..., N_k, причем $N_1 + N_2 + ... + N_k = N$, то

$$\bar{x}_г = \frac{1}{N}\left(x_1N_1 + x_2N_2 + ... + x_kN_k\right),$$

или

$$\bar{x}_г = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} x_iN_i, \qquad (1)$$

Как уже отмечалось (п. 1), извлечение объекта из генеральной совокупности есть наблюдение случайной величины X.

Пусть все значения x_1, x_2, ..., x_N различны. Так как каждый объект может быть извлечен с одной и той же вероятностью $1/N$, то

$$M\left(X\right) = x_1\frac{1}{N} + x_2\frac{1}{N} + ... + x_N\frac{1}{N} = \bar{x}_г,$$

т.е.

$$M(X) = \bar{x}_г. \qquad (2)$$

Такой же итог следует, если значения x_1, x_2, ..., x_k имеют соответственно частоты N_1, N_2, ..., N_k.

В случае непрерывного распределения признака X по определению полагают $\overline{x}_{\text{г}} = M(X)$.

Пусть для изучения генеральной совокупности относительно количественного признака X произведена выборка объема n.

Определение 2. *Выборочной средней* $\overline{x}_{\text{в}}$ называется среднее арифметическое значений признака выборочной совокупности.

Если все значения $x_1, x_2, ..., x_n$ признака выборки объема n различны, то

$$\overline{x}_{\text{в}} = \frac{1}{n}\left(x_1 + x_2 + ... + x_n\right). \tag{3}$$

Если же значения признака $x_1, x_2, ..., x_k$ имеют соответственно частоты $\text{n}_1, n_2, ..., n_k$, причем $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$, то

$$\overline{x}_{\text{в}} = \frac{1}{n}\left(x_1 n_1 + x_2 n_1 + ... + x_n n_k\right),$$

или

$$\overline{x}_{\text{в}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i n_i. \tag{4}$$

Пример 1. Выборочным путем были получены следующие данные о массе 20 морских свинок при рождении (в г): 30, 30, 25, 32, 30, 25, 33, 32, 29, 28, 27, 36, 31, 34, 30, 23, 28, 31, 36, 30. Найдем выборочную среднюю $\overline{x}_{\text{в}}$.

Согласно формуле (4), имеем:

$$\overline{x}_2 = \frac{30\cdot5+25\cdot2+32\cdot2+33+29+28\cdot2+27+36\cdot2+31\cdot2+34+23}{20} = 30.$$

Итак. $\overline{x}_{\text{в}} = 30$.

Так как каждой выборке объема n, извлеченной из генеральной совокупности, соответствует некоторое число $x_{\text{в}}$, определяемое формулой (3) или (4), то выборочную среднюю можно рассматривать как случайную величину $\overline{X}$, $\overline{X} = \frac{1}{n}\left(X_1 + X_2 + ... + X_n\right)$ называемую выборочной средней случайной величиной.

Далее, не уменьшая общности рассуждений, будем считать значения $x_1, x_2, ..., x_n$ признака в этом пункте различными.

Найдем $M(X)$, пользуясь тем, что $M(X_i) = M(X)$ (см. п. 1).

С учетом свойств математического ожидании (§§ 7.5, 7.9) получаем:

$$M\left(\overline{X}\right) = M\left[\frac{1}{n}\left(X_1 + X_2 + ... + X_n\right)\right] = \frac{1}{n}\left[M\left(X_1\right) + M\left(X_2\right) + ... + M\left(X_n\right)\right] =$$
$$= \frac{1}{n}\left[M\left(X\right) + M\left(X\right) + ... + M\left(X\right)\right] = \frac{1}{n}na = a.$$

Итак, $M(\overline{X})$ (математическое ожидание выборочной средней) совпадает с a (генеральной средней), Теперь найдем $D(\overline{X})$. Так как $D(X_i) = D(X)$ (п. 1) и $X_1, X_2, ..., X_n$ независимы, то, согласно свойствам дисперсии (§§ 7.6, 7.9) получаем

$$D\left(\overline{X}\right) = D\left[\frac{1}{n}\left(X_1 + X_2 + ... + X_n\right)\right] = \frac{1}{n^2}\left[D\left(X_1\right) + D\left(X_2\right) + ... + D\left(X_n\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{n^2}\left[D\left(X\right) + D\left(X\right) + ... + D\left(X\right)\right] = \frac{1}{n^2} nD\left(X\right) = \frac{D\left(X\right)}{n},$$

т. е.

$$D\left(\overline{X}\right) = \frac{D\left(X\right)}{n}. \qquad (5)$$

Наконец, отметим, что если варианты x_i — большие числа, то для облегчения вычисления выборочной средней применяют следующий прием. Пусть С — константа.

Так как $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i - C\right) + nC$,

то формулу (3) можно преобразовать к виду

$$\overline{x}_{\text{в}} = C + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - C\right). \qquad (6)$$

За константу C (так называемый ложный нуль) берут некоторое среднее значение между наименьшим и наибольшим значениями x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

П р и м е р 2. Имеется выборка:
$x_1 = 71{,}88$; $x_2 = 71{,}93$; $x_3 = 72{,}05$; $x_4 = 72{,}07$; $x_5 = 71{,}90$; $x_6 = 72{,}02$; $x_7 = 71{,}93$; $x_8 = 71{,}77$; $x_9 = 72{,}11$; $x_{10} = 71{,}96$.

Требуется найти $\overline{x}_{\text{в}}$.

Возьмем $C= 72{,}00$ и вычислим разности $\alpha_i = x_i - C$: $\alpha_1 = -0{,}12$; $\alpha_2 = -0{,}07$; $\alpha_3 = 0{,}05$; $\alpha_4 = 0{,}07$; $\alpha_5 = -0{,}10$; $\alpha_6 = 0{,}02$; $\alpha_7 = -0{,}07$; $\alpha_8 = -0{,}23$; $\alpha_9 = 0{,}11$; $\alpha_{10} = -0{,}04$.
Их сумма: $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_{10} = -0{,}38$; их среднее арифметическое $\frac{1}{10}\left(\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_{10}\right) = -0{,}038 \approx -0{,}04$. Выборочная средняя

$$\overline{x}_{\text{в}} = 72{,}00 - 0{,}04 = 71{,}96.$$

3. Генеральная и выборочная дисперсии. Для того чтобы охарактеризовать рассеяние значений количественного признака X генеральной совокупности вокруг своего среднего значения, вводят следующую характеристику — генеральную дисперсию.

О п р е д е л е н и е 1. *Генеральной дисперсией* $D_{\text{г}}$ называется среднее арифметическое квадратов отклонений значений признака X генеральной совокупности от генеральной средней $x_{\text{г}}$.

Если все значения $x_1, x_2, ..., x_N$ признака генеральной совокупности объема N различны, то

$$D_г = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \bar{x}_г\right)^2.$$

Если же значения признака x_1 $x_2, ..., x_к$ имеют соответственно частоты $N_1, N_2, ..., N_k$, причем $N_1 + N_2 + \cdots + N_k = N$, то

$$D_г = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}\left(x_i - \bar{x}_г\right)^2 N_i. \qquad (7)$$

Пример 1. Генеральная совокупность задана таблицей распределения:

x_i	2	4	5	6
N_i	8	9	10	3

Найдем генеральную дисперсию.

Согласно формулам (1) и (7), имеем

$$\bar{x}_г = \frac{2\cdot 8+4\cdot 9+5\cdot 10+6\cdot 3}{8+9+10+3} = \frac{120}{30} = 4;$$

$$D_г = \frac{(2-4)^2\cdot 8+(4-4)^2\cdot 9+(5-4)^2\cdot 10+(6-4)^2\cdot 3}{30} = \frac{54}{30} = 1{,}8.$$

Генеральным средним квадратическим отклонением (стандартом) называется $\sigma_г = \sqrt{D_г}$.

Пусть все значения $x_1, x_2, ..., x_N$ различны.

Найдем дисперсию признака X, рассматриваемого как случайная величина:

$$D(X) = M[(X - M(X))^2].$$

Так как $M(X) = \bar{x}_г$ и $P\left\{X = x_i\right\} = \frac{1}{N}$ (см. п. 2), то

$$D(X) = \left(x_1 - \bar{x}_г\right)^2 \frac{1}{N} + \left(x_2 - \bar{x}_г\right)^2 \frac{1}{N} + ... + \left(x_N - \bar{x}_г\right)^2 \frac{1}{N} = D_г,$$

т. е.

$$D(X) = D_г.$$

Таким образом, дисперсия $D(X)$ равна $D_г$.

Такой же итог можно получить, если значения $x_1, x_2, ..., x_k$ имеют соответственно частоты $N_1, N_2, ..., N_k$.

В случае непрерывного распределения признака X по определению полагают

$$D_г = D(X). \qquad (8)$$

С учетом формулы (8) формула (5) (п. 2) перепишется в виде $D\left(\overline{X}\right)=\frac{D_{\text{г}}}{n}$, откуда $\sqrt{D\left(\overline{X}\right)}=\sqrt{D_{\text{г}}}\Big/\sqrt{n}$ или $\sigma\left(\overline{X}\right)=\sigma_{\text{г}}\Big/\sqrt{n}$. Величина $\sigma(\overline{X})$ называется *средней квадратической ошибкой.*

Для того чтобы охарактеризовать рассеяние наблюдаемых значений количественного признака выборки вокруг своего среднего значения $\bar{x}_{\text{в}}$, вводят выборочную дисперсию.

Определение 2. *Выборочной дисперсией* $D_{\text{в}}$ называется среднее арифметическое квадратов отклонений наблюдаемых значений признака X от выборочной средней $\bar{x}_{\text{в}}$.

Если все значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ признака выборки объема n различны, то

$$D_{\text{в}}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}_{\text{в}}\right)^2. \tag{9}$$

Если же значения признака $x_1, x_2, ..., x_k$ имеют соответственно частоты $n_1, n_2, ..., n_k$, причем $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$, то

$$D_{\text{в}}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\left(x_i-\bar{x}_{\text{в}}\right)^2 n_i. \tag{10}$$

Выборочным средним квадратическим отклонением (стандартом) называется квадратный корень из выборочной дисперсии:

$$\sigma_{\text{в}}=\sqrt{D_{\text{в}}}.$$

Вычисление выборочной дисперсии можно упростить, используя следующую теорему.

Теорема 1. *Выборочная дисперсия равна среднему арифметическому квадратов значений признака минус квадрат его среднего арифметического:*

$$D_{\text{в}}=\bar{x}_{\text{в}}^{\,2}-(\bar{x}_{\text{в}})^2,$$

где

$$\bar{x}_{\text{в}}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}n_i x_i\ ,\ \bar{x}_{\text{в}}^{2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}n_i x_i^2\ .$$

Доказательство. Действительно преобразуя формулу (10), получим:

$$D_{\text{в}}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}n_i\left(x_i-\bar{x}_{\text{в}}\right)^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}n_i\left(x_i^2-2x_i\bar{x}_{\text{в}}+\left(\bar{x}_{\text{в}}\right)^2\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}n_i x_i^2-\frac{2\bar{x}_{\text{в}}}{n}\sum_{i=1}^{k}n_i x_i+$$

$$+\frac{\left(\bar{x}_{\text{в}}\right)^2}{n}\sum_{i=1}^{k}n_i=\bar{x}_{\text{в}}^{2}-2\bar{x}_{\text{в}}\bar{x}_{\text{в}}+\left(\bar{x}_{\text{в}}\right)^2=\bar{x}_{\text{в}}^{2}-\left(\bar{x}_{\text{в}}\right)^2.$$

Замечание 1. Из формулы (7) аналогично находим

$$D_{\text{г}} = \overline{x_{\text{г}}^{2}} - (\overline{x}_{\text{г}})^2.$$

Замечание 2. Если варианты (i = 1, 2, ..., n) — большие числа, то для облегчения вычисления выборочной дисперсии $D_{\text{в}}$ формулу (9) преобразуют к следующему виду:

$$D_{\text{в}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - C\right)^2 - \left(\overline{x}_{\text{в}} - C\right)^2, \tag{11}$$

где C—ложный нуль.

Действительно, с учетом формулы (3) имеем

$$\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - C\right) - n\left(\overline{x}_{\text{в}} - C\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2C\sum_{i=1}^{n} x_i + nC^2 - n\overline{x}_{\text{в}}^2 + 2C\overline{x}_{\text{в}} - nC^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2nC\overline{x}_{\text{в}} - n\overline{x}_{\text{в}}^2 + 2nC\overline{x}_{\text{в}} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{x}_{\text{в}}^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2n\overline{x}_{\text{в}} + n\overline{x}_{\text{в}} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2x_{\text{в}}\sum_{i=1}^{n} x_i + n\overline{x}_{\text{в}}^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2 - 2x_i\overline{x}_{\text{в}} + \overline{x}_{\text{в}}^2\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}_{\text{в}}\right)^2,$$

откуда

$$D_{\text{в}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}_{\text{в}}\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - C\right)^2 - \left(\overline{x}_{\text{в}} - C\right)^2 .$$

Пример 2 Для выборки, указанной в примере 2 из п. 2, найдем $D_{\text{в}}$ (ложный нуль остается прежним C = 72,00)

$$\sum_{i=1}^{10}\left(x_i - C\right)^2 = \sum_{i=1}^{10}\alpha_i^2 = 0{,}0144 + 0{,}0049 + 0{,}0025 + 0{,}0049 +$$
$$+0{,}0100 + 0{,}0004 + 0{,}0049 + 0{,}0529 + 0{,}0121 + 0{,}0016 = 0{,}1086;$$

$$\left(\overline{x}_{\text{в}} - C\right)^2 = \left(-0{,}038\right)^2 \approx 0{,}0014 .$$

Наконец, согласно формуле (11) $D_{\text{в}} \approx \frac{1}{10}\cdot 0{,}1086 - 0{,}0014 = 0{,}0094$.

Замечание 3. Для описательных характеристик вариационного ряда x_1, x_2, ..., x_n (или полученного из него статистического распределения выборки), кроме выборочной средней и выборочной дисперсии, используются также медиана, мода и размах.

Медианой m_{e} вариационного ряда называют варианту, которая делит вариационный ряд на две части, равные по числу вариант. Если $n = 2k$, т. е. ряд $x_1, x_2, ..., x_k, ..., x_{2k}$ имеет четное число членов, то $m_e = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$;

если $n = 2k+1$, то $m_е = x_{k+1}$

Модой M_0 вариационного ряда называют вариант, имеющий наибольшую частоту.

Размахом R вариационного ряда называют разность $x_{max} - x_{min}$, где x_{max} — наибольший, а x_{min} — наименьший вариант ряда.

Кстати, размах используется в формуле Стерджеса (см. § 8.3, п. 2).

Пример 3. Найти медиану, моду и размах статистического распределения выборки

x_i	0	1	2	3	4	5
n_i	1	2	1	1	2	3

Решение. Используя определения медианы, моды и размаха, имеем:

$$m_e = \frac{2+3}{2} = 2{,}5,\ M_0 = 5,\ R = 5 - 0 = 5.$$

Далее, не уменьшая общности рассуждений, будем считать значения $x_1, x_2, ..., x_n$ признака различными.

Выборочную дисперсию, рассматриваемую как случайная величина, будем обозначать $\tilde{S}^2$:

$$\tilde{S}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2.$$

Теорема 2. *Математическое ожидание выборочной дисперсии равно* $((n-1)/n)D_г$, *т. е.*

$$M\left(\tilde{S}^2\right) = \frac{n-1}{n}D_в.$$

Доказательство. С учетом свойств математического ожидания получаем

$$M\left(\tilde{S}^2\right) = M\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M\left[\left(X_i - \overline{X}\right)^2\right].$$

Вычислим одно слагаемое $M[(X_i - \overline{X})^2]$. Имеем

$$M[(X_i - \overline{X})^2] = M(X_i^2 - 2X_i\overline{X} + \overline{X}^2) = M(X_i^2) - 2M(X_i\overline{X}) + M(\overline{X}^2).$$

Вычислим по отдельности эти математические ожидания.

Согласно свойству 1 дисперсии (§§ 7.6, 7.9) и формулам (2), (8) имеем

$$M(X_i^2) = M(X^2) = D(X) + M^2(X) = D_г + a^2.$$

Далее, с учетом свойства 4 математического ожидания,

$$M\left(X_i\overline{X}\right)=M\left[X_i\tfrac{1}{n}\left(X_1+X_2+\ldots+X_n\right)\right]=\tfrac{1}{n}\left[M\left(X_iX_1\right)+M\left(X_iX_2\right)+\ldots+M\left(X_iX_n\right)\right],$$

но слагаемое этой суммы, у которого второй индекс равен i, т. е. $M(X_iX_i)$, равно $M(X_i^2) = D_г + a^2$. У всех остальных слагаемых $M(X_iX_j)$ индексы разные. Поэтому в силу независимости X_i, и X_j (см. §§ 7.5, 7.9).

$$M(X_iX_j) = M(X_i)M(X_j) = M(X)M(X) = M^2(X) = a^2.$$

Так как имеется $n - 1$ таких слагаемых, то

$$M\left(X_i\overline{X}\right)=\tfrac{1}{n}\left[D_в+a^2+\left(n-1\right)a^2\right]=a^2+\frac{D_в}{n}.$$

В силу свойства 1 дисперсии (§§ 7.6, 7.9) получаем

$$M(\overline{X}^2) = D(\overline{X}) + M^2(\overline{X})$$

Ранее найдено

$$M(\overline{X}) = M(X) = a,\ D(\overline{X}) = (1/n)D_г.\ (\text{См. пп. 2 и 3}).$$

Поэтому $M\left(\overline{X}^2\right)=\frac{D_в}{n}+a^2$.

Таким образом,

$$M\left[\left(X_i-\overline{X}\right)^2\right]=D_в+a^2-2\left(a^2+\frac{D_в}{n}\right)+\frac{D_в}{n}+a^2=\frac{n-1}{n}D_в$$

и не зависит от индекса суммирования i. Поэтому

$$M\left(\tilde{S}^2\right)=\tfrac{1}{n}n\tfrac{n-1}{n}D_в=\tfrac{n-1}{n}D_в,$$

что и требовалось доказать.

4. Оценки параметров распределения. Одной из задач статистики является оценка параметров распределения случайной величины X по данным выборки. При этом в теоретических рассуждениях считают, что генеральная совокупность бесконечна. Это делается для того, чтобы можно было переходить к пределу при $n \to \infty$, где n — объем выборки. Для оценки параметров распределения X из данных выборки составляют выражения, которые должны служить оценками неизвестных параметров. Например, $\overline{X}$ (см. п. 2) является оценкой генеральной средней $\overline{x}_г$, а $\widetilde{S}^2$ (см. п. 3) — оценкой генеральной дисперсии $D_г$. Обозначим через Θ оцениваемый параметр, через $\widetilde{\Theta}_n$ — оценку этого параметра [$\widetilde{\Theta}_n$ является выражением, составленным из X_1, X_2, ..., X_n (см. п. 1)]. Для того чтобы оценка $\widetilde{\Theta}_n$ давала хорошее приближение, она должна удовлетворять определенным требованиям. Укажем эти требования.

Несмещенной называют оценку $\widetilde{\Theta}_n$, математическое ожидание которой равно оцениваемому параметру Θ, т. е. $M(\widetilde{\Theta}_n) = \Theta$, в противном случае оценка называется *смещенной*.

Пример 1. Оценка $\overline{X}$ является несмещенной оценкой генеральной средней a, так как $M(\overline{X}) = a$ (см. п. 2).

Пример 2. Оценка $\tilde{S}^2$ является смещенной оценкой генеральной дисперсии $D_г$, так как, согласно установленной выше теореме 2(см. п. 3),

$$M\left(\tilde{S}^2\right) = \frac{n-1}{n} D_в \neq D_в .$$

Наряду с выборочной дисперсией $\tilde{S}^2$ рассматривают еще так называемую эмпирическую или исправленную дисперсию $S^2 = \frac{n}{n-1}\tilde{S}^2$, которая является также оценкой генеральной дисперсии. Для S^2 с учетом установленной выше теоремы 2 (см. п. 3) имеем

$$M\left(S^2\right) = M\left(\frac{n}{n-1}\tilde{S}^2\right) = \frac{n}{n-1} M\left(\tilde{S}^2\right) = \frac{n}{n-1}\frac{n-1}{n} D_в = D_в .$$

Таким образом, оценка S^2 в отличие от оценки $\tilde{S}^2$ является несмещенной оценкой генеральной дисперсии. Явное выражение для S^2 имеет вид

$$S^2 = \frac{n}{n-1}\tilde{S}^2 = \frac{n}{n-1}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2,$$

т. е.

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2 . \tag{12}$$

Естественно в качестве приближенного неизвестного параметра брать несмещенные оценки для того, чтобы не делать систематической ошибки в сторону завышения или занижения.

Состоятельной называют такую оценку $\tilde{\Theta}_n$ параметра Θ, что для любого наперед заданного числа $\varepsilon > 0$ вероятность $P\{|\tilde{\Theta}_n - \Theta| < \varepsilon\}$ при $n \to \infty$ стремится к единице[1]. Это значит, что при достаточно больших n можно с вероятностью, близкой к единице, т. е. почти наверное, утверждать, что оценка $\tilde{\Theta}_n$ отличается от оцениваемого параметра Θ меньше, чем на ε.

Очевидно, такому требованию должна удовлетворять всякая оценка, пригодная для практического использования.

Заметим, что несмещенная оценка $\tilde{\Theta}_n$ будет состоятельной, если при $n \to \infty$ ее дисперсия стремится к нулю: $D(\tilde{\Theta}_n) \to 0$. Это следует из неравенства Чебышева (5) из §7.11, п.1).

Пример 3 Как было установлено (см. п. 3), $D\left(\overline{X}\right) = \frac{D_г}{n}$.

Отсюда следует, что несмещенная оценка $\overline{X}$ является и состоятельной, так как

[1] В таком случае говорят, что Θ_n сходится к Θ по вероятности.

$$\lim_{n\to\infty} D\left(\overline{X}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{D_г}{n} = D_г \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \,.$$

Можно показать, что несмещенная оценка S^2 является также состоятельной. Поэтому в качестве оценки генеральной дисперсии принимают исправленную дисперсию. Заметим, что оценки S^2 и $\widetilde{S}^2$ отличаются множителем $\frac{n}{n-1}$, который стремится к 1 при $n \to \infty$. На практике $\widetilde{S}^2$ и S^2 не различают при $n > 30$.

Для оценки генерального среднего квадратического отклонения используют исправленное среднее квадратическое отклонение, которое равно квадратному корню из исправленной дисперсии:

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2} \,. \qquad (13)$$

Левые части формул (12) и (13), в которых случайные величины X_1, X_2, ..., X_n заменены их реализациями x_1 x_2, ..., x_n и $\overline{X}$ — выборочной средней $\overline{x}_в$ будем обозначать соответственно через s^2 и s.

Отметим, что если варианты x_i — большие числа, то для облегчения вычисления s^2 формулу для s^2 аналогично формуле (9) преобразуют к виду

$$s^2 = \frac{n}{n-1}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - C\right)^2 - \left(\overline{x}_в - C\right)^2\right], \qquad (14)$$

где С—ложный нуль.

Оценки, обладающие свойствами несмещенности и состоятельности, при ограниченном числе опытов могут отличаться дисперсиями.

Ясно, что чем меньше дисперсия оценки, тем меньше вероятность грубой ошибки при определении приближенного значения параметра. Поэтому необходимо, чтобы дисперсия оценки была минимальной. Оценка, обладающая таким свойством, называется *эффективной.*
Из отмеченных требований, предъявляемых к оценке, наиболее важными являются требования несмещенности и состоятельности.

П р и м е р 4. С плодового дерева случайным образом отобрано 10 плодов. Их массы x_1, x_2, ..., x_{10} (в граммах) записаны в первой колонке приведенной ниже таблицы. Обработаем статистические данные выборки. Для вычисления $\overline{x}_в$ и s по формулам (6) и (14) введем ложный нуль $C = 250$ и все необходимые при этом вычисления сведем в указанную таблицу:

i	x_i	$x_i - C$	$(x_i - C)^2$
1	225	-25	625
2	274	24	576
3	305	55	3025
4	253	3	9
5	220	-30	900
6	245	-5	25
7	211	-39	1521
8	234	-16	256
9	230	-20	400
10	231	-19	261
Сумма		-72	7598

Следовательно,

$$\overline{x}_{\text{в}} = 250 + \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}\left(x_i - 250\right) = 250 + \frac{1}{10}\left(-72\right) = 250 - 7{,}2 \approx 243(\text{г}).$$

$$s = \sqrt{\frac{10}{9}\left[\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}\left(x_i - 250\right)^2 - \left(250 - 7{,}2 - 250\right)^2\right]} = \sqrt{\frac{10}{9}\left[759{,}8 - \left(-7{,}2\right)^2\right]} \approx 28 \ (\text{г}).$$

Отсюда $\frac{s}{\sqrt{10}} \approx 9$ (г).

Итак, оценка генеральной средней массы плода равна 243 г со средней квадратической ошибкой 9 г.

Оценка генерального среднего квадратического отклонения массы плода равна 28 г.

Пример 5 Через каждый час измерялось напряжение в электросети. Результаты измерений (в вольтах) представлены в следующей таблице:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x_i	222	219	224	220	218	217	221	220	215	218	223	225
i	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
x_i	220	226	221	216	211	219	220	221	222	218	221	219

Найти оценки для математического ожидания и дисперсии результатов измерений. Оценки для математического ожидания и дисперсии найдем по формулам (6) и (14) положив $C = 220$. Все необходимые вычисления приведены в нижеследующей таблице:

i	$x_i - C$	$(x_i - C)^2$	i	$x_i - C$	$(x_i - C)^2$	i	$x_i - C$	$(x_i - C)^2$
1	2	4	9	-5	25	17	1	1
2	-1	1	10	-2	4	18	-1	1
3	4	16	11	3	9	19	0	0
4	0	0	12	5	25	20	1	1
5	-2	4	13	0	0	21	2	4
6	-3	9	14	6	36	22	-2	4
7	1	1	15	1	1	23	1	1
8	0	0	16	-4	16	24	-1	1
Сумма	1	35		4	116		1	13

Следовательно,

$$\bar{x}_{\text{в}} = 220 + \tfrac{1}{24}\sum_{i=1}^{24}\left(x_i - 220\right) = 220 + \tfrac{6}{24} = 220{,}25.\ (\text{В})$$

$$s^2 = \tfrac{24}{23}\left[\tfrac{1}{24}\sum_{i=1}^{24}\left(x_i - 220\right)^2 - \left(220{,}25 - 220\right)^2\right] \approx 7{,}06\ .\ (\text{В}^2)$$

§ 8.5. ДОВЕРИТЕЛЬНЫЕ ИНТЕРВАЛЫ ДЛЯ ПАРАМЕТРОВ НОРМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

1. Надежность. Доверительные интервалы. Пусть Θ — оцениваемый параметр, $\widetilde{\Theta}_n$ — его оценка, составленная из $X_1, X_2, ..., X_n$.

Если известно, что оценка $\widetilde{\Theta}_n$ является несмещенной и состоятельной, то по данным выборки вычисляют значение $\widetilde{\Theta}_n$ и считают его приближением истинного значения Θ. При этом среднее квадратическое отклонение (если его вообще вычисляют) оценивает порядок ошибки. Такие оценки называются *точечными.* Например, в предыдущем параграфе речь шла о точечных оценках генеральной средней и генеральной дисперсии. В общем случае, когда о распределении признака X ничего неизвестно, это уже немало.

Если же о распределении имеется какая-либо информация, то можно сделать больше.

Здесь речь будет идти об оценке параметров a и σ случайной величины, имеющей нормальное распределение. Это очень важный случай. Например (см. §7.10), результат измерения имеет нормальное распределение. В этом случае становится возможным применять так называемое *интервальное оценивание,* к изложению которого мы и переходим.

Пусть $\delta > 0$ — некоторое число. Если выполняется неравенство $|\Theta - \widetilde{\Theta}_n| < \delta$, т. е. $-\delta < \Theta - \widetilde{\Theta}_n < \delta$, что можно записать в виде $\widetilde{\Theta}_n - \delta < \Theta < \widetilde{\Theta}_n + \delta$, то говорят, что интервал $(\widetilde{\Theta}_n - \delta, \widetilde{\Theta}_n + \delta)$ покрывает параметр Θ. Однако невозможно указать оценку $\widetilde{\Theta}_n$ такую, чтобы событие $\{|\Theta - \widetilde{\Theta}_n| < \delta\}$ было достоверным, поэтому мы будем говорить о вероятности этого события. Число δ называется *точностью оценки* $\widetilde{\Theta}_n$.

Определение. *Надежностью* (*доверительной вероятностью*) оценки $\widetilde{\Theta}_n$ параметра Θ для заданного $\delta > 0$ называется вероятность γ того, что интервал $(\widetilde{\Theta}_n - \delta, \widetilde{\Theta}_n + \delta)$ покроет параметр Θ, т. е.

$$\gamma = P\{\widetilde{\Theta}_n - \delta < \Theta < \widetilde{\Theta}_n + \delta\} = P\{|\widetilde{\Theta}_n - \Theta| < \delta\}. \tag{1}$$

Заметим, что после того, как по данным выборки вычислена оценка $\widetilde{\Theta}_n$, событие $\{|\widetilde{\Theta}_n - \Theta| < \delta\}$ становится или достоверным, или невозможным, так как интервал $(\widetilde{\Theta}_n - \delta, \widetilde{\Theta}_n + \delta)$ или покрывает Θ, или нет. Но дело в том, что параметр Θ нам неизвестен. Поэтому мы называем надежностью γ уже вычисленной оценки $\widetilde{\Theta}_n$ вероятность того, что интервал $(\widetilde{\Theta}_n - \delta, \widetilde{\Theta}_n + \delta)$, найденный для произвольной выборки, покроет Θ. Если мы сделаем много выборок объема n и для каждой из них построим интервал $(\widetilde{\Theta}_n - \delta, \widetilde{\Theta}_n + \delta)$, то доля тех выборок, чьи интервалы покроют Θ, равна γ.

Иными словами, γ есть мера нашего доверия вычисленной оценке $\widetilde{\Theta}_n$.

Ясно, что, чем меньше число δ, тем меньше надежность γ.

Формула (1) означает следующее: вероятность того, что интервал $(\widetilde{\Theta}_n - \delta, \widetilde{\Theta}_n + \delta)$ заключает в себе (покрывает) неизвестный параметр Θ равна γ.

Интервал $(\widetilde{\Theta}_n - \delta, \widetilde{\Theta}_n + \delta)$, который покрывает неизвестный параметр Θ с заданной надежностью γ, называется *доверительным интервалом.* Концы доверительного интервала называют *доверительными границами.* Доверительные границы являются случайными величинами (они изменяются от выборки к выборке.

Надежность γ обычно принимают равной 0,95 или 0,99, или 0,999.

Конечно, нельзя категорически утверждать, что найденный доверительный интервал покрывает параметр Θ. Но в этом можно быть уверенным на 95% при $\gamma = 0{,}95$, на 99% при $\gamma = 0{,}99$ и т. д. Это значит, что если сделать много выборок, то для 95% из них (если, например, $\gamma = 0{,}95$) вычисленные доверительные интервалы действительно покроют Θ.

2. Доверительный интервал для математического ожидания при известном σ. В некоторых случаях среднее квадратическое отклонение σ ошибки измерения (а вместе с нею и самого измерения) бывает известно. Например, если измерения осуществляются одним и тем же прибором при одних и тех же условиях.

Итак, пусть случайная величина X распределена нормально с параметрами a и σ, причем σ известно. Построим доверительный интервал, покрывающий неизвестный параметр a с заданной надежностью γ. Данные выборки есть реализации случайных величин $X_1, X_2, ..., X_n$, имеющих нормальное распределение с параметрами a и σ (§ 8.4, п. 1). Оказывается, что и выборочная средняя случайная величина $\overline{X} = \frac{1}{n}\left(X_1 + X_2 + ... + X_n\right)$ тоже имеет нормальное распределение (это мы примем без доказательства). При этом (см. § 8.4, пп. 2, 3)

$$M\left(\overline{X}\right) = a;\ \sigma\left(\overline{X}\right) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Потребуем, чтобы выполнялось соотношение $P(|\overline{X} - a| < \delta) = \gamma$, где γ — заданная надежность. Пользуясь формулой (6) из § 7.10, получим

$$P\left(\left|\overline{X} - a\right| < \delta\right) = 2\Phi\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right),$$

или

$$P(|\overline{X} - a| < \delta) = 2\Phi(t),$$

где

$$t = \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}. \tag{2}$$

Найдя из равенства (2) $\delta = \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}$, можем написать

$$P\left(\left|\overline{X} - a\right| < \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 2\Phi\left(t\right).$$

Так как P задана и равна γ, то окончательно имеем (для получения рабочей формулы выборочную среднюю случайную величину заменяем на $\overline{x}_{\text{в}}$, найденную из выборки $x_1, x_2, ..., x_n$:

$$P\left(\overline{x}_{\text{в}} - \frac{t\sigma}{\sqrt{n}} < a < \overline{x}_{\text{в}} + \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 2\Phi\left(t\right) = \gamma. \tag{3}$$

Смысл полученного соотношения таков: *с надежностью* γ *можно утверждать, что доверительный интервал* $\left(\overline{x}_{\text{в}} - \frac{t\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x}_{\text{в}} + \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ *покрывает* неизвестный параметр *a;* точность оценки $\delta = \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}$. Здесь число t определяется из равенства $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2}$ [оно следует из $2\Phi(t) = \gamma$] по таблице приложения 3.

Как уже упоминалось, надежность γ обычно принимают равной или 0,95 или 0,99, или 0,999.

Пример. Признак X распределен в генеральной совокупности нормально с известным $\sigma = 0{,}40$. Найдем по данным выборки доверительный интервал для a с надежностью $\gamma = 0{,}99$, если $n = 20$, $\bar{x}_в = 6{,}34$.

Для $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2} = \frac{0{,}99}{2} = 0{,}495$ находим по таблице приложения 3 $t = 2{,}58$. Следовательно, $\delta = 2{,}58 \cdot \frac{0{,}40}{\sqrt{20}} \approx 0{,}23$. Границы доверительного интервала $6{,}34 - 0{,}23 = 6{,}11$ и $6{,}34 + 0{,}23 = 6{,}57$. Итак, доверительный интервал $(6{,}11; 6{,}57)$ покрывает a с надежностью 0,99.

3. Доверительный интервал для математического ожидания при неизвестном σ. Пусть случайная величина X имеет нормальное распределение с неизвестными нам параметрами a и σ. Оказывается, что случайная величина (ее возможные значения будем обозначать через t)

$$T = \frac{\bar{X} - a}{S/\sqrt{n}},$$

где n —объем выборки; $\bar{X}$ — выборочная средняя; S — исправленное среднее квадратическое отклонение, имеет распределение, не зависящее от a и σ. Оно называется распределением Стьюдента[1].

Плотность вероятности распределения Стьюдента дается формулой

$$S(t, n) = B_n\left(1 + \frac{t^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}},$$

где коэффициент B_n зависит от объема выборки.

Потребуем, чтобы выполнялось соотношение

$$P(|T| < t_\gamma) = \gamma,$$

где γ — заданная надежность.

Так как $S(t, n)$ — четная функция от t, то, пользуясь формулой (9) (см. § 7.9) получим

$$P\left(\frac{|\bar{X} - a|\sqrt{n}}{S} < t_\gamma\right) = 2\int_0^{t_\gamma} S(t, n)\,dt = \gamma.$$

[1] Стьюдент — псевдоним английского статистика И. О. Госсета.

Отсюда

$$P\left(\bar{x}_{\text{в}} - \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_{\text{в}} + \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}}\right) = \gamma\,. \qquad (4)$$

Следовательно, приходим к утверждению: *с надежностью* γ *можно утверждать, что доверительный интервал* $\left(\bar{x}_{\text{в}} - \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}};\ \bar{x}_{\text{в}} + \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}}\right)$ *покрывает неизвестный параметр а точность оценки* $\delta = \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}}$. В формуле (4) случайные величины $\bar{X}$ и S заменены неслучайными величинами $\bar{x}_{\text{в}}$ s, найденными по выборке.

В приложении 4 приведена таблица значений $t_\gamma = t(\gamma, n)$ для различных значений n и обычно задаваемых значений надежности.

Заметим, что при $n \geq 30$ распределение Стьюдента практически не отличается от нормированного нормального распределения (см. § 7.10). Это связано с тем, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{t^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}} = e^{-\frac{t^2}{2}}$.

Пример. Признак X распределен в генеральной совокупности нормально. Найдем доверительный интервал для $\bar{x}_{\text{г}}$ с надежностью $\gamma = 0{,}99$, если $n = 20$; $\bar{x}_{\text{в}} = 6{,}34$; $s = 0{,}40$. Для надежности $\gamma = 0{,}99$ и $n = 20$ находим по таблице приложения 4 $t_\gamma = 2{,}861$. Следовательно, $\delta = 2{,}861 \cdot \frac{0{,}40}{\sqrt{20}} \approx 0{,}26$. Концы доверительного интервала 6,34 – 0,26 = 6,08 и 6,34 + 0,26 = 6,60. Итак, доверительный интервал (6,08; 6,60) покрывает $\bar{x}_{\text{г}}$ с надежностью 0,99.

4. Доверительный интервал для среднего квадратического отклонения. Для нахождения доверительного интервала для среднего квадратического отклонения σ будем использовать следующее предложение, устанавливаемое аналогично двум предыдущим (пп. 2 и 3).

С надежностью γ можно утверждать, *что доверительный интервал* $(s - sq;\ s + sq)$ *покрывает неизвестный параметр* σ; *точность оценки* $\delta = sq$.

В приложении 5 приведена таблица значений $q = q(\gamma, n)$ для различных значений n и обычно задаваемых значений надежности γ.

Пример 1. Признак X распределен в генеральной совокупности нормально. Найдем доверительный интервал для σ с надежностью $\gamma = 0{,}95$, если $n = 20$; $s = 0{,}40$.

Для надежности $\gamma = 0{,}95$ и $n = 20$ находим в таблице приложения 5 $q = 0{,}37$. Далее, $sq = 0{,}40 \cdot 0{,}37 \approx 0{,}15$. Границы доверительного интервала 0,40 – 0,15 = 0,25 и 0,40 + 0,15 = 0,55. Итак, доверительный интервал (0,25; 0,55) покрывает $\sigma_{\text{г}}$ с надежностью 0,95.

Примечание. Выше предполагалось, что $q < 1$. Если $q > 1$, то, учитывая, что $\sigma > 0$, получаем $0 < \sigma < s + sq$. Значения q и в этом случае определяются по таблице приложения 5.

Пример 2. Признак X генеральной совокупности распределен нормально. По выборке объема $n = 10$ найдено «исправленное» среднее квадратическое отклонение $s = 0{,}16$. Найдем доверительный интервал для σ с надежностью 0,999.

Для надежности $\gamma = 0{,}999$ и $s = 10$ по таблице приложения 5 находим $q = 1{,}80$.

Следовательно, искомый доверительный интервал таков:

$$0 < \sigma < 0{,}16 + 0{,}16 \cdot 1{,}80,$$

или

$$0 < \sigma < 0{,}448.$$

§ 8.6. АНАЛИЗ СТАТИСТИЧЕСКИХ ЗАВИСИМОСТЕЙ

1. Корреляционная зависимость. Часто приходится иметь дело с более сложной зависимостью, чем функциональная. Такова, например, связь между осадками и урожаем или связь между толщиной снегового покрова зимой и объемом стока последующего половодья. Здесь каждому значению одной величины соответствует множество возможных значений другой величины. Подобного рода зависимости относятся к корреляционным зависимостям.

Определение 1. Две случайные величины X и Y находятся в *корреляционной* зависимости, если каждому значению любой из этих величин соответствует определенное распределение вероятностей другой величины.

Определение 2. *Условным математическим ожиданием* дискретной случайной величины X при $Y = y$ (y — определенное возможное значение Y) называется сумма произведений возможных значений величины X на их условные вероятности:

$$M_y(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p(x_i \mid y),$$

где $p(x_i|y)$ — условная вероятность равенства $X = x_i$ при условии, что $Y = y$.

Для непрерывных величин

$$M_y(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_i \varphi(x \mid y) dx,$$

где $\varphi(x|y)$ — плотность вероятности случайной непрерывной величины X при условии $Y = y$.

Условное математическое ожидание $M_y(X)$ есть функция от y: $M_y(X) = f(y)$, которую называют *функцией регрессии* величины X на величину Y.

Аналогично определяются условное математическое ожидание случайной величины Y и функция регрессии Y *на* X:

$$M_x(Y) = g(x).$$

Уравнение $x = f(y)$ $(y = g(x))$ называется *уравнением регрессии* X на Y (Y на X), а линия на плоскости, соответствующая этому уравнению, называется *линией регрессии.*

Линия регрессии Y на X (X на Y) показывает, как в среднем зависит Y от X (X от Y).

Пример 1. Пусть X и Y независимы, $M(X) = a$, $M(Y) = b$. Тогда $g(x) = M_x(Y) = M(Y) = b$; $f(y) = M_y(X) = M(X) = a$. Линии регрессии изображены на рис. 49

Пример 2. X и Y связаны линейной зависимостью: $Y = AX + B, A \neq 0$. Тогда функция регрессии Y на X будет иметь вид

$$g(x) = M_x(Y) = M(Ax+ B) = Ax+ B.$$

Так как $X = \frac{1}{A}\left(Y - B\right)$, то функция — регрессии X на Y имеет вид

$$f\left(y\right) = M_y\left(X\right) = M\left[\frac{1}{A}\left(y - B\right)\right] = \frac{1}{A}\left(y - B\right).$$

Значит, линия регрессии X на Y: $x = (y - B)/A$, т. е. $y = Ax+ B$. Таким образом, в случае линейной зависимости X и Y линии регрессии X на Y и Y на X совпадают, и эта линия прямая.

2. Корреляционный момент и коэффициент корреляции.

Для характеристики корреляционной зависимости между величинами используются коррекляционный момент и коэффициент корреляции.

Определение 1: *Корреляционным моментом* μ_{xy} случайных величин X и Y называют математическое ожидание произведения отклонений этих величин

$$\mu_{xy}, = M[(X - M(X))(Y - M(Y))].$$

Замечание. Корреляционный момент μ_{xy} может быть переписан в виде

$$\mu_{xy} = M(XY) - M(X)M(Y). \tag{1}$$

Действительно, используя свойства математического ожидания (см. §§·7.5, 7.9), имеем

$$M[(X - M(X))(Y - M(Y))] = M(XY - YM(X) - XM(Y) + M(X)M(Y)) =$$
$$= M(XY) - M(Y)M(X) - M(X)M(Y) + M(X)M(Y) =$$
$$= M(XY) - M(X)M(Y).$$

Теорема 1. *Корреляционный момент двух независимых случайных величин X и Y равен нулю.*

Доказательство. Согласно замечанию

$$\mu_{xy} = M(XY) - M(X)M(Y),$$

а так как X и Y независимые случайные величины, то (см. §§ 7.5, 7.9)

$$M(XY) = M(X)M(Y)$$

и, значит, $\mu_{xy} = 0$.

Из определения корреляционного момента следует, что он имеет размерность, равную произведению размерностей величин X и Y, т. е. его величина зависит от единиц измерения случайных величин. Поэтому для одних и тех же двух величин величина корреляционного момента может иметь различные значения в зависимости от того, в каких единицах

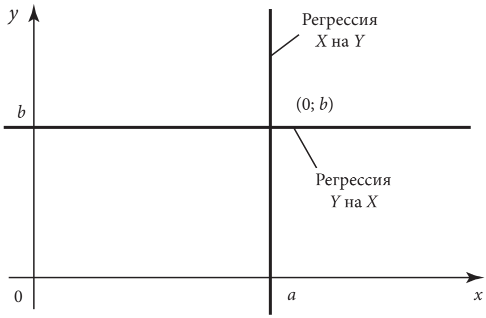


Рис 49

были измерены величины. Для устранения этого недостатка условились за меру связи (зависимости) двух случайных величин X и Y принять безразмерную величину

$$r_{xy} = \frac{\mu_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}, \tag{2}$$

где $\sigma_x = \sigma(X)$, $\sigma_y = \sigma(Y)$, называемую *коэффициентом корреляции.*

Теорема 2. *Абсолютная величина корреляционного момента двух случайных величин не превосходит произведения их средних квадратических отклонений:*

$$|\mu_{xy}| \le \sigma_x \sigma_y \; [\sigma_x = \sigma(X), \sigma_y = \sigma(Y)].$$

Доказательство. Введя в рассмотрение случайную величину $Z_1 = \sigma_y X - \sigma_x Y$, где $\sigma_x = \sigma(X)$, $\sigma_y = \sigma(Y)$, найдем ее дисперсию. Имеем

$$D(Z) = M[(Z_1 - M(Z_1))^2] = M[\sigma_y(X - M(X)) - \sigma_x(Y - M(Y))]^2 =$$
$$= M[\sigma^2(X^2 - 2XM(X) + M^2(X)) + \sigma_x(Y^2 - 2YM(Y) + M^2(Y)) -$$

$$- 2\sigma_x\sigma_y(X - M(X))(Y - M(Y))] = \sigma_y^2(M(X^2) - M^2(X)) + \sigma_x^2(M(Y^2) - M^2(Y)) -$$
$$- 2\sigma_x\sigma_y M[(X - M(X))(Y - M(Y))] = \sigma_y^2\sigma_x^2 + \sigma_x^2\sigma_y^2 - 2\sigma_x\sigma_y\mu_{xy} =$$
$$= 2\sigma_x^2\sigma_y^2 - 2\sigma_x\sigma_y\mu_{xy} \geq 0$$

(любая дисперсия неотрицательна).

Отсюда

$$\mu_{xy} \leq \sigma_x\sigma_y.$$

Введя случайную величину $Z_2 = \sigma_y X + \sigma_x Y$, аналогично найдем

$$\mu_{xy} \geq -\sigma_x\sigma_y.$$

В результате имеем

$$-\sigma_x\sigma_y < \mu_{xy} < \sigma_x\sigma_y$$

или

$$|\mu_{xy}| \leq \sigma_x\sigma_y. \tag{3}$$

Определение 2. Случайные величины X и Y называются некоррелированными, если $r_{xy} = 0$, и коррелированными, если $r_{xy} \neq 0$.

Пример 1. Независимые случайные величины X и Y являются некоррелированными, так как в силу соотношения (1) $r_{xy} = 0$.

Пример 2. Пусть случайные величины X и Y связаны линейной зависимостью $Y = AX + B$, $A \neq 0$. Найдем коэффициент корреляции. Имеем:

$$\mu_{xy} = M(XY) - M(X)M(Y) = M(AX^2 + BX) - M(X)M(AX + B) =$$
$$= AM(X^2) + BM(X) - AM^2(X) - BM(X) = A(M(X^2) - M^2(X)) = A\sigma^2,$$
$$\sigma^2 = D(Y) = D(AX + B) = D(AX) = A^2D(X) = A^2\sigma_x^2,$$

откуда

$$\sigma_y = |A|\sigma_x.$$

Поэтому

$$\left|r_{xy}\right| = \frac{|A|\sigma_x^2}{|A|\sigma_x^2} = 1\,.$$

Таким образом, коэффициент корреляции случайных величин, связанных линейной зависимостью, равен ±1 (точнее, $r_{xy} = 1$, если $A > 0$ и $r_{xy} = -1$, если $A < 0$).

Отметим некоторые свойства коэффициента корреляции.

Из примера 1 следует:

1) *Если X и Y — независимые случайные величины, то коэффициент корреляции равен нулю.*

Заметим, что обратное утверждение, вообще говоря, неверно. (Доказательство см. в работе [7].)

2) *Абсолютная величина коэффициента корреляции не превосходит единицы:*

$$|r_{xy}| \leq 1.$$

Действительно, разделив обе части неравенства (3) на произведение $\sigma_x\sigma_y$, приходим к искомому неравенству.

3) Как видно из формулы (2) с учетом формулы (1), коэффициент корреляции характеризует относительную величину отклонения математического ожидания произведения $M(XY)$ от произведения математических ожиданий $M(X)$ $M(Y)$ величин X и Y. Так как это отклонение имеет место только для зависимых величин, то можно сказать, что *коэффициент корреляции характеризует тесноту зависимости между X и Y*

3. Линейная корреляция. Этот вид корреляционной зависимости встречается довольно часто.

Определение. Корреляционная зависимость между случайными величинами X и Y называется *линейной корреляцией,* если обе функции регрессии $f(y)$ и $g(x)$ являются линейными. В этом случае обе линии регрессии являются прямыми; их называют *прямыми регрессии.*

Выведем уравнения прямой регрессии Y на X, т. е. найдем коэффициент линейной функции $g(x) = Ax + B$.

Обозначим $M(X) = a$, $M(Y) = b$, $M[(X - a)^2] = \sigma_x^2$, $M[(Y - b)^2] = \sigma_y^2$. С использованием свойств МО (§§ 7.5, 7.9) находим:

$$M(Y) = M[g(X)] = M(AX + B) = AM(X) + B,$$

т. е. $b = Aa + B$, откуда $B = b - Aa$.

Далее, с помощью тех же свойств математического ожидания имеем

$$M(XY) = M[Xg(X)] = M(AX^2 + BX) = AM(X^2) + BM(X) = AM(X^2) + (b - Aa)a,$$

откуда

$$A = \frac{\mu_{xy}}{M\left(X^2\right) - a^2}$$

или, согласно свойству 1 дисперсии (§7.6, 7.9)

$$A = \frac{\mu_{xy}}{\sigma_x^2}\cdot$$

Полученный коэффициент называется *коэффициентом регрессии Y на X* обозначается через $\rho(Y/X)$:

$$\rho\left(Y / X\right) = \frac{\mu_{xy}}{\sigma_x^2}. \qquad (4)$$

Таким образом, уравнение прямой регрессии Y на X имеет вид

$$y = \rho(Y/X)(x - a) + b. \qquad (5)$$

Аналогично можно получить уравнение прямой регрессии X на Y

$$x = \rho\,(X/Y)(y - b) + a, \qquad (6)$$

где

$$\rho\left(X/Y\right)=\frac{\mu_{xy}}{\sigma_y^2}\tag{7}$$

есть коэффициент регрессии *X* на *Y*.

Уравнения прямых регрессии можно записать в более симметричном виде, если воспользоваться коэффициентом корреляции. С учетом этого коэффициента имеем:

$$\rho\left(Y/X\right)=r_{xy}\frac{\sigma_y}{\sigma_x};\ \rho\left(X/Y\right)=r_{xy}\frac{\sigma_x}{\sigma_y}\tag{8}$$

и поэтому уравнения прямых регрессии принимают вид:

$$y-b=r_{xy}\frac{\sigma_y}{\sigma_x}\left(x-a\right);$$

$$x-a=r_{xy}\frac{\sigma_x}{\sigma_y}\left(y-b\right).$$

Из уравнений прямых регрессии видно, что обе эти прямые проходят через точку (a; b); угловые коэффициенты прямых регрессии равны соответственно (рис. 50)

$$\operatorname{tg}\alpha=r_{xy}\frac{\sigma_y}{\sigma_x};\ \operatorname{tg}\beta=\frac{1}{r_{xy}}\frac{\sigma_y}{\sigma_x}.$$

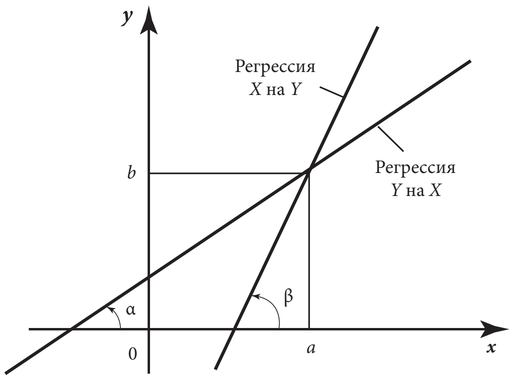


Рис 50

Так как $|r_{xy}|\le 1$, то $|\operatorname{tg}\alpha|\le|\operatorname{tg}\beta|$. Это означает, что прямая регрессии *Y* на *X* имеет меньший наклон к оси абсцисс, чем прямая регрессии *X* на *Y* Чем ближе $|r_{xy}|$ к единице, тем меньше угол между прямыми регрессии. Эти прямые сливаются тогда и только тогда, когда $|r_{xy}|=1$.

При $r_{xy}=0$ прямые регрессии описываются уравнениями $y=b$; $x=a$.

В этом случае $M_x(Y)=b=M(Y)$; $M_y(X)=a=M(X)$.

Из формул (8) видно, что коэффициенты регрессии имеют тот же знак, что и коэффициент корреляции r_{xy}, и связаны соотношением

$$\rho(Y/X)\rho(X/Y)=r_{xy}{}^2.$$

4. Нормальное распределение двумерной случайной величины.

Определение. Распределение двумерной случайной величины $(X;\,Y)$ называется *нормальным,* если ее плотность вероятности определяется выражением (см., например [4]):

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r_{xy}^2}}e^{-\frac{1}{2\left(1-r_{xy}^2\right)}\left[\frac{(x-a_1)^2}{\sigma_x^2}+\frac{(y-a_2)^2}{\sigma_y^2}-2r_{xy}\frac{x-a_1}{\sigma_x}\cdot\frac{y-a_2}{\sigma_y}\right]}.$$

Нормальное распределение зависит от пяти параметров a_1, a_2, σ_x, σ_y и r_{xy}. Можно доказать, что a_1 и a_2 — математические ожидания случайных величин X и Y, σ_x и σ_y— их средние квадратические отклонения и r_{xy} — коэффициент корреляции этих величин.

Покажем, что если составляющие двумерной нормально распределенной случайной величины некоррелированы, то они и независимы. Действительно, если X и Y некоррелированы, то $r_{xy}=0$ и, следовательно,

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y}e^{-\frac{(x-a_1)^2}{2\sigma_x^2}-\frac{(y-a_2)^2}{2\sigma_y^2}}=\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a_1)^2}{2\sigma_x^2}}\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-a_2)^2}{2\sigma_y^2}}=f_1(x)f_2(y),$$

что и означает независимость составляющих X и Y (см. [4], § 3.6 следствие).

Справедливо и обратное утверждение.

Таким образом, понятия «некоррелированные величины» и «независимые величины» для случая нормального распределения равносильны.

5. Расчет прямых регрессии. Пусть проведено n опытов, в результате которых получены следующие значения системы величин $(X;\,Y)$: (x_i, y_i), $i=1,2,\ldots,n$. За приближенные значения $M(X)$, $M(Y)$, $D(X)$ и $D(Y)$ принимают их выборочные значения:

$$\bar{x}_{\text{в}}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i;\ \bar{y}_{\text{в}}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i;\ s_1^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}_{\text{в}}\right)^2;\ s_2^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\bar{y}_{\text{в}}\right)^2.$$

Оценкой для μ служит величина

$$\mu_{\text{в}}=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}_{\text{в}}\right)\left(y_i-\bar{y}_{\text{в}}\right).$$

Заменяя в соотношениях (3), (4), (7) величины μ, σ_1, σ_2 их выборочными значениями μ_B, s_1, s_2, получим приближенные значения коэффициента корреляции и коэффициентов регрессии:

$$r \approx \frac{\mu_в}{s_1 s_2};\ \rho\left(Y / X\right) \approx \frac{\mu_в}{s_1^2};\ \rho\left(X / Y\right) \approx \frac{\mu_в}{s_2^2}$$

($\frac{\mu_в}{s_1 s_2}$ и $\frac{\mu_в}{s_1^2}$, $\frac{\mu_в}{s_2^2}$ — выборочные коэффициенты соответственно корреляции[1] и регрессии).

Подставляя в уравнения (5) и (6) вместо *a, b,* $\rho\,(Y/X)$ и $\rho(X/Y)$ их приближенные значения, получим выборочные уравнения прямых регрессий:

$$y - \bar{y}_в = \frac{\mu_2}{s_1^2}\left(x - \bar{x}_B\right),$$

$$x - \bar{x}_B = \frac{\mu_в}{s_2^2}\left(y - \bar{y}_в\right).$$

П р и м е р. Найти выборочное уравнение прямой регрессии Y на X по данным $n = 10$ наблюдений. Результаты наблюдений и нужные вычисления собраны в таблице. ($C = 70$ и $C' = 9{,}0$ — ложные нули).

x_i	y_1	$x_i - C$	$x_i - C'$	$x_i - \bar{x}_в$	$(x_i - \bar{x}_в)^2$	$(y_i - \bar{y}_в)^2$	$(x_i - \bar{x}_в)^2 \times (y_i - \bar{y}_в)^2$
71	8,6	1	–0,4	–4,5	20,25	–0,48	2,16
72	8,9	2	–0,1	–3,5	12,25	–0,18	0,63
73	8,9	3	–0,1	–2,5	6,25	–0,18	0,45
74	9,0	4	0,0	–1,5	2,25	0,08	–0,12
75	9,1	5	0,1	–0,5	0,25	0,02	–0,01
76	9,2	6	0,2	0,5	0,25	0,12	0,06
77	9,2	7	0,2	1,5	2,25	0,12	0,18
78	9,2	8	0,2	2,5	6,25	0,12	0,30
79	9,3	9	0,3	3,5	12,25	0,22	0,77
80	9,4	10	0,4	4,5	20,25	0,32	1,44
Сумма		55	0,8		82,5		5,86

$\bar{x}_в = 75{,}5$ $\bar{y}_в = 9{,}08$ $s_1^2 = 9{,}17$ $\mu_в = 0{,}65$

Вычисляем:

$$\frac{\mu_в}{s_1^2} = \frac{0{,}65}{9{,}17} \approx 0{,}071.$$

[1] Выборочный коэффициент корреляции $\mu_в/(s_1 s_2)$ обозначим через $r_в$.

Уравнение искомой прямой имеет вид

$$y - 9{,}08 = 0{,}071\ (x - 75{,}5),$$

или

$$y = 0{,}071x + 3{,}72.$$

§ 8.7. ПРОВЕРКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ

1. Нулевая и конкурирующая гипотезы.

Определение 1. Всякое высказывание о генеральной совокупности (случайной величине), проверяемое по выборке (результатам наблюдений), называют *статистической гипотезой*.

Примеры. Генеральная совокупность, о которой есть лишь выборочные сведения, имеет нормальный закон распределения, или генеральная средняя равна 10. Не располагая сведениями обо всей генеральной совокупности, выдвинутую гипотезу (ее называют нулевой H_0, а противоречащую ей H_1 — конкурирующей, или альтернативной[1]) сопоставляют с выборочными сведениями (проверка гипотезы) и делают вывод о том, принять гипотезу H_0 или H_1. Правило, по которому гипотеза H_0 отвергается или принимается, называется *статистическим критерием*.

Определение 2. Вероятность p отвергнуть гипотезу H_0, когда она верна (т.е. допустить так называемую ошибку первого рода) называется *уровнем значимости* критерия

Принять гипотезу H_0 тогда как на самом деле высказывание H_0 неверно, т.е. верной считается гипотеза H_1, — это ошибка второго рода.

Вероятность p задается заранее малым числом, поскольку это вероятность ошибочного заключения, при этом обычно используют стандартные значения: 0,05; 0,01; 0,005; 0,001. Например, $p = 0{,}05$ означает, что если гипотезу H_0 проверять по каждой из 200 выборок одинакового объема, то в среднем в 10 случаях из 200 мы совершим ошибку первого рода.

2. Проверка гипотезы о значимости выборочного коэффициента корреляции. Предположим, что двумерная генеральная совокупность (X, Y) распределена нормально и из неё извлечена выборка объема n. Пусть далее, по этой выборке найден выборочный коэффициент корреляции $r_в$, который оказался отличным от нуля. Поскольку выборка отобрана случайно, то еще нельзя заключить, что коэффициент корреляции генеральной совокупности $r_г$ также отличен от нуля. Поэтому возникает необходимость при заданном уровне значимости p проверить нулевую

[1] Например, если гипотеза H_0 состоит в предположении, что математическое ожидание нормального распределения равно 10, то конкурирующая гипотеза, в частности, может состоять в предположении, что $a \neq 10$, что коротко записывают так: H_0: $a = 10$; H_1: $a \neq 10$ [6].

гипотезу H_0: $r_г = 0$ о равенстве нулю генерального коэффициента корреляции при конкурирующей гипотезе H_1: $r_г \neq 0$.

Если нулевая гипотеза отвергается, то это значит, что выборочный коэффициент корреляции *значимо* отличается от нуля (кратко *значим*), а X и Y коррелированы.

Если же нулевая гипотеза принимается, то выборочный коэффициент корреляции незначим, а X и Y некоррелированы.

Далее обозначим через T случайную величину, имеющую распределение

$$T = \left| r_в \right| \frac{\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_в^2}} \tag{1}$$

Стьюдента с $k = n - 2$ степенями свободы, а через T_0 — значение случайной величины T, вычисляемое по данным наблюдений.

Теперь гипотеза H_0 проверяется так [11].

По заданному уровню значности p и числу степеней свободы $k = n - 2$ — по таблице (приложение 6) находят критическую точку $t(p; k)$. Если $|T_0| < t(p; k)$ — гипотеза H_0 принимается на уровне значимости p. Если $|T_0| > t(p; k)$ — гипотезу H_0 отвергают.

Пример. По выборке объема $n = 62$, извлеченной из нормальной двумерной совокупности, найден выборочный коэффициент корреляции $r_в = 0{,}6$. При уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу о равенстве нулю генерального коэффициента корреляции при конкурирующей гипотезе H_1: $r_г \neq 0$.

Решение. Согласно формуле (1) имеем $T_0 = 0{,}6\sqrt{\frac{62-2}{1-(0{,}6)^2}} =$

$= 0{,}6\sqrt{\frac{60}{0{,}64}} \approx 5{,}81$.

По уровню значимости 0,05 и числу степеней свободы $k = 62 - 2 = 60$ по таблице приложения 6 находим, что t(0,05; 6 0) = 2,0.

Так как $T_0 > t(p; k)$ — нулевую гипотезу отвергаем и, следовательно, выборочный коэффициент корреляции значимо отличается от нуля, т. е. X и Y коррелированы.

3. Критерии согласия χ^2 Пирсона[1]. Пусть по выборке объема n получено эмпирическое распределение с равноотстоящими вариантами:

Варианты	x_1	x_2	…	x_m
Эмпирические (наблюдаемые) частоты	n_1	n_2	…	n_m

[1] См., например, [6].

По данным наблюдения выдвигают гипотезу о законе распределения генеральной совокупности, например, предполагают, что генеральная совокупность распределена равномерно или нормально.

Затем для тех же объектов, которые попали в выборку, вычисляют частоты, уже исходя из теоретической гипотезы. В результате получаются частоты (их называют *выравнивающими частотами*), которые, вообще говоря, отличаются от наблюдавшихся. Как определить, правильно или нет выдвинута гипотеза, т. е. случайны ли расхождения наблюдавшихся и выравнивающих частот или эти расхождения являются следствием неправильности гипотезы? Для решения этого вопроса применяют критерии согласия эмпирических наблюдений к выдвинутой гипотезе. Имеется несколько критериев согласия: χ^2 («хи-квадрат») Пирсона, критерий Колмогорова, критерий Смирнова и др. ознакомимся с критерием согласия χ^2 («хи-квадрат») Пирсона.

Предположим, что на основе приведенного выше распределения выдвинута гипотеза *H*: генеральная совокупность имеет нормальное распределение. Для вычисления выравнивающих частот поступают следующим образом:

1) находят значения $\bar{x}_в$, $\sigma_в = \sqrt{D_в}$;

2) выравнивающие частоты n'_i ищут по формуле

$$n'_i = \frac{nh}{\sigma_2}\varphi\left(u_i\right),$$

где n — сумма наблюдавшихся частот; h — разность между двумя соседними вариантами; $u_i = \frac{x_i - \bar{x}_2}{\sigma_2}$ и $\varphi\left(u\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-u^2}{2}}$.

В результате получают множество выравнивающих частот:

$$n'_1, n'_2, ..., n'_m$$

Обозначим через χ^2 сумму квадратов разностей между эмпирическими и выравнивающими частотами, деленных на соответствующие выравнивающие частоты:[1]

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{\left(n_i - n'_i\right)^2}{n'_i} \qquad (2)$$

(это обозначение и для распределения χ^2).

Для данной выборки по формуле (2) находим значение случайной величины χ^2. Обозначим его через $\chi_0{}^2$. Затем определяется число $k = m - 3$, называемое *числом степеней свободы*, где m — число различных вариант выборки.

[1] Из этой формулы видно, что чем меньше различие между эмпирическими и выравнивающими частотами, тем меньше будет χ^2.

Теперь проверка гипотезы *H* проводится так. Задаются достаточно малой вероятностью *p*, называемой *уровнем значимости* (обычно в качестве *p* берут либо 0,05, либо 0,01, либо 0,001). Считается, что событие с такой вероятностью является практически невозможным. По таблице значений χ^2 (приложение 6, здесь речь идет о так называемых критических точках распределения χ^2) по заданному уровню значимости *p* и числу степеней свободы *k* находят значение $\chi^2(\rho;\ k)$. Если окажется, что $\chi_0{}^2 > \chi^2\ (p;\ k)$, то гипотеза *H* отвергается на уровне значимости *p*, так как произошло событие, которое не должно было произойти при верной гипотезе *H*; если же $\chi_0{}^2 < \chi^2\ (p;\ k)$, то *H* принимается на уровне значимости *p*.

Пример. При уровне значимости 0,05 проверим гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности, если известны:

эмпирические частоты... 6 13 38 74 106 85 30 14

теоретические частоты... 3 14 42 82 99 76 37 13

Вычислим χ_0^2 для чего составим расчетную таблицу

i	n_i	n'_i	$n_i - n'_i$	$(n_i - n'_i)^2$	$\frac{(n_i-n'_i)^2}{n'_i}$
1	6	3	3	9	3
2	13	14	–1	1	0,07
3	38	42	–4	16	0,38
4	74	82	–8	64	0,78
5	106	99	7	49	0,49
6	85	76	9	81	1,07
7	30	37	–7	49	1,32
8	14	13	1	1	0,08
					$\chi_0^2 = 7{,}19$

Найдем число степеней свободы, учитывая, что число различных вариант $m = 8$. Имеем: $k = 8 - 3 = 5$. По уровню значимости $p = 0{,}05$ и числу степеней свободы $k = 5$ по таблице значений χ^2 (приложение 7) находим: $\chi^2\ (0{,}05;\ 5) = 11{,}1$. Так как $\chi^2 < \chi^2\ (0{,}05;\ 5)$, нет оснований отвергнуть гипотезу *H*.

4. Выборочный коэффициент ранговой корреляции Спирмена и проверка гипотезы о его значимости. Предположим, что объекты генеральной совокупности обладают двумя качественными признаками, измеряемыми в ранговой шкале.

Пусть выборка объема *n* содержит независимые объекты, которые обладают качественными признаками *A* и *B*.

Для оценки степени связи признаков вводят, в частности, выборочный коэффициент ранговой корреляции Спирмена. Он находится по формуле (см. например, [6], гл. 19),

$$\rho_{\text{в}} = 1 - \frac{6 \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(r_i - s_i\right)^2}{n^3 - n}, \qquad (3)$$

где r_i; и s_i — ранги i-го объекта соответственно по признакам A и B, n — число пар наблюдений.

Если ранги всех объектов равны (полная прямая связь): $r_i = s_i$, $i = 1, 2, ..., n$, то из формулы (3) следует $\rho_{\text{в}} = 1$. При полной обратной связи, когда ранги объектов по двум переменным расположены в обратном порядке, можно показать, что $\sum_{i=1}^{n}\left(r_i - s_i\right)^2 = \frac{n^3 - n}{3}$ и по формуле (3) $\rho_{\text{в}} = -1$.

Во всех остальных случаях $|\rho_{\text{в}}| < 1$, причем чем ближе к нулю его абсолютная величина, тем зависимость меньше.

Далее, чтобы при условии значимости p проверить нулевую гипотезу о равенстве нулю генерального коэффициента ранговой корреляции $\rho_{\text{г}}$ Спирмена при конкурирующей гипотезе H_1: $\rho_{\text{г}} \neq 0$, надо вычислить величину (ее обозначим через $T_{\text{кр}}$),

$$T_{\text{кр}} = t_{\text{кр}}\left(p; k\right) \cdot \sqrt{\frac{1 - \rho_{\text{в}}^2}{n - 2}}, \qquad (4)$$

где n — объем выборки, $\rho_{\text{в}}$ — выборочный коэффициент ранговой корреляции Спирмена, $t_{\text{кр}}(p; k)$ — критическая точка, которую находят по таблице распределения Стьюдента (приложение 1) по уровню значимости p и числу степеней свободы $k = n - 2$.

Если $|\rho_{\text{в}}| < T_{\text{кр}}$ — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Ранговая корреляционная связь между качественными признаками незначима. Если $|\rho_{\text{в}}| > T_{\text{кр}}$ — нулевую гипотезу отвергают. Между качественными признаками существует значимая ранговая корреляционная связь.

Для практических целей использование ранговой корреляционной связи весьма полезно. Так, если установлена высокая ранговая корреляция между двумя качественными признаками изделий, то достаточно контролировать изделия только по одному из признаков, что удешевляет и ускоряет контроль.

П р и м е р 1. Найти выборочный коэффициент ранговой корреляции Спирмена по данным ранга объектов выборки объема $n = 10$ и на уровне значимости 0,05 проверить, является ли ранговая корреляционная связь значимой.

r_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
s_i	6	4	8	1	2	5	10	3	7	9

Решение. Найдем разности рангов $r_i - s_i$. –5, –2, –5, 3, 3, 1, –3, 5, 2, 1. Подставляя это в формулу (3), где $n = 10$, найдем $\rho_в = 1 - \frac{6 \cdot 112}{990} = 0{,}32$

Затем по таблице (приложение 6) найдем, что $t_{кр}(p; k) = 2{,}31$. Отсюда по формуле (4)

$$T_{кр} = 2{,}31 \cdot \sqrt{\frac{1-(0{,}32)^2}{10-2}} \approx 0{,}79 \,.$$

Так как $\rho_в > T_{кр}$ — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу, ранговая корреляционная связь между признаками незначимая.

Пример 2. По результатам тестирования 10 школьников по двум предметам А и В на основе набранных баллов получены следующие ранги (таблица 12.5).

		Школьники										
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Всего
Ранги по предметам	A r_j	2	4	5	1	7,52	7,5	7,5	7,5	3	10	55
	B s_j	2,5	6	4	1	2,52	7	8	9,5	5	9,5	55
	$r_j - s_j$	–0,5	–2	1	0	5	0,5	–0,5	–2	–2	0,5	0
	$(r_j - s_j)^2$	0,25	4	1	0	25	0,25	0,25	4	4	0,25	39

По формуле (3) найдем выборочный коэффициент ранговой корреляции, учитывая, что $n = 10$

$$\rho_в = 1 - \frac{6 \cdot 39}{10^3 - 10} = 0{,}76 \,.$$

Далее, по таблице (приложение 6) найдем, что $t_{кр}(0{,}05;\, 8) = 2{,}31$. Отсюда по формуле (4)

$$T_{кр} = 2{,}31 \cdot \sqrt{\frac{1-(0{,}76)^2}{10-2}} \approx 0{,}55 \,.$$

Так как $\rho_в > T_{кр}$, то ранговый коэффициент корреляции $\rho_в$ значим на 5% -ном уровне.

Задача. Психолог выясняет, как связаны между собой индивидуальные показатели готовности к школе, полученные до начала обучения в школе у 11 первоклассников и их средняя успеваемость в конце учебного года. Для этого были проранжированы значения показателей школьной готовности, полученные при поступлении в школу, и итоговые показатели успеваемости в конце года у этих же учащихся в среднем.

Результаты представим в таблице.

№ учащихся п/п	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Ранги показателей школьной готовности r_i	3	5	6	1	4	11	9	2	8	7	10
Ранги среднегодовой успеваемости	2	7	8	3	4	6	11	1	10	5	9

Проверить значимость рангового коэффициента корреляции на 1% уровне.

Решение. Для решения этой задачи найдём разность рангов.

$r_i - s_i$: 1 – 2 –2 –2 0 5 –2 1 –2 2 1

Подставляя, это в формулу (3), где $n = 11$ и произведя вычисления, получим

$$\rho_в = 1 - \frac{6 \cdot 52}{11 \cdot (11 \cdot 11 - 1)} \approx 0{,}76.$$

Далее, по таблице (приложение 6) найдем $t_{кр}(0{,}01; 9) = 3{,}25$. Отсюда по формуле (4)

$$T_{кр} = 3{,}25 \cdot \sqrt{\frac{1-(0{,}76)^2}{11-2}} \approx 0{,}71.$$

Так как $\rho_в > T_{кр}$, т.е. 0,76 > 0,71, то коэффициент ранговой корреляции $\rho_в$ значим на 1 %-ном уровне. т.е. коэффициент корреляции почти совпал с критическим значением для уровня значимости в 1%, т.е. показатели школьной готовности и итоговые оценки первоклассников связаны положительной корреляционной значимостью: чем выше показатель школьной готовности, тем лучше учится первоклассник.

В терминах статистических гипотез психолог должен отклонить нулевую (H_0) гипотезу о сходстве и принять альтернативную (H_1) о наличии различий, которая говорит о том, что связь между показателями школьной готовности и средней успеваемостью отлична от нуля.

Замечание. О других результатах в психолого-педагогических исследованиях см., например, в [15].

§ 8.8. ПРОВЕДЕНИЕ ИЗМЕРЕНИЙ КАК ВЫБОРОЧНЫЙ МЕТОД

1. Закон распределения ошибок. О*шибкой* (или *погрешностью*) измерения называется разность $x - a$ между результатом измерения x и истинным значением измеряемой величины a (§ 7.12, п. 3).

Ошибки измерений, упоминаемые ранее (§ 7.12, п. 3), в основном можно подразделить на три группы: 1) грубые ошибки; 2) систематические ошибки; 3) случайные ошибки.

Грубые ошибки возникают от невнимательности при чтении показаний прибора, неправильной записи показаний, неправильном использовании прибора. Эти ошибки могут быть исключены соблюдением правил измерения.

Систематические ошибки происходят, например, от несовершенства приборов, от личных качеств наблюдателя и могут быть устранены соответствующими поправками.

Будем считать, что результаты измерения не содержат грубых и систематических ошибок.

Однако и после устранения этих ошибок результаты измерения все еще будут содержать неустранимые, неизбежные ошибки, которые получили название *случайных ошибок измерения*. Эти ошибки вызываются многочисленными трудно уловимыми причинами, каждая из которых приводит лишь к незначительному колебанию результатов измерения (например, при взвешивании на аналитических весах к таким причинам относятся незначительные колебания температуры и влажности воздуха, колебания стола, попадание соринок на взвешиваемый предмет и т. д.). Как уже отмечалось (§7.12, п. 3), ошибку измерения (обозначаемую через T) можно считать суммой большого числа независимых случайных величин, которая по центральной предельной теореме должна быть распределена нормально. При этом принимают еще, что МО случайных ошибок равно нулю.

Результат измерения есть также случайная величина (обозначаемая через X), связанная с T зависимостью $X = a + T$. Отсюда $M(X) = a$, $\sigma(X) = \sigma(T) = \sigma$ (§7.12, п. 3).

Таким образом, предполагая измерение свободным от грубых и систематических ошибок, можно считать, что возможный результат измерения есть случайная величина X, математическое ожидание которой равно истинному значению a измеряемой величины. Так как величина T подчиняется нормальному закону распределения, то возможный результат измерения $X = a + T$ как случайная величина, линейно зависящая от T, также подчиняется (см. [13], § 17) нормальному закону распределения. В этом заключается *основной закон ошибок.*

При каждом измерении фиксируется один количественный результат. Результаты любой серии из n измерений будут случайным образом колебаться вокруг точного значения измеряемой величины. Следовательно, с этим точным значением связана некоторая случайная величина X. В итоге n независимых измерений получается n ее возможных значений $x_1, x_2,..., x_n$. Если все возможные значения случайной величины X считать генеральной совокупностью, то полученные при n измерениях значения $x_1, x_2, ..., x_n$ образуют выборку. По этой выборке и необходимо определить распределение случайной величины X (распределение генеральной совокупности). Таким образом, проведение измерений является частным случаем выборочного метода, когда в качестве генеральной совокупности рассматриваются все возможные значения указанной случайной величину X и исследуется распределение этой величины по выборке (результатами измерений) на основе ранее изложенной теории.

2 Оценка точного значения измеряемой величины. Пусть в итоге n независимых измерений некоторой величины X получены следующие результаты:

$$x_1, x_2, \ldots, x_n. \tag{1}$$

Пусть эти результаты свободны от грубых и систематических ошибок (неверные результаты отброшены, на систематические ошибки введены поправки).

Оценить точное значение a измеряемой величины — это значит:

а) определить функцию $\alpha = \alpha(x_1, x_2, \ldots x_n)$, которая обеспечивает достаточно близкое приближение к значению a;

б) указать границы интервала $(\alpha - \delta, \alpha + \delta)$, который с заданной вероятностью γ покрывает истинное значение a (эта оценка называется доверительной оценкой, вероятность γ — доверительной вероятностью, или надежностью оценки, интервал $(\alpha - \delta, \alpha + \delta)$ — доверительным интервалом, а его границы — доверительными границами). Оценка $\alpha = \alpha(x_1, x_2, \ldots x_n)$ должна (по возможности) обладать следующими свойствами: несмещенности, состоятельности и эффективности (§ 8.4, п. 4).

Если все измерения произведены с одинаковой точностью, то в качестве оценки точного значения a измеряемой величины принимают среднее арифметическое значение результатов (1):

$$a \approx \bar{x}_{\text{в}} = \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n},\ a \approx \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\ . \tag{2}$$

Как было показано (§ 8.4, п.4), эта оценка является несмещенной и состоятельной. Она оказывается и эффективной при дополнительном предположении о том, что случайные ошибки измерений подчинены нормальному закону распределения. Такое предположение имеется в виду и в дальнейшем. Отметим, что оценка (2) относится к числу точечных оценок.

Далее, будем рассматривать доверительные оценки вида

$$|a - \bar{x}_{\text{в}}| < \delta\ (\delta > 0) \tag{3}$$

или

$$\bar{x}_{\text{в}} - \delta < a < \bar{x}_{\text{в}} + \delta, \tag{4}$$

где $\bar{x}_{\text{в}}$ — среднее значение (см. (2)). Величина δ (точность оценки) определяется по заданной доверительной вероятности γ (надежности оценки); γ обычно задается в виде одного из трех значений: $\gamma = 0{,}95$, $\gamma = 0{,}99$, $\gamma = 0{,}999$.

Доверительная оценка при известной точности измерений.

Если известно среднее квадратическое отклонение σ, то доверительная оценка (3) имеет вид (см. § 8.5 п. 3 формула (3)).

$$\left|a - \bar{x}_{\text{в}}\right| < \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}, \tag{5}$$

где n — число измерений, а значение t доверительной вероятности γ из условия $2\Phi(t) = \gamma$ и находится с помощью таблиц. Точность оценки δ в этом случае выражается формулой

$$\delta = \frac{\sigma t}{\sqrt{n}}.$$

Доверительная оценка при неизвестной точности измерений.

Если средняя квадратическая погрешность σ заранее неизвестна, то вместо нее применяют эмпирический стандарт s

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}_{\text{в}}\right)^2},$$

который служит оценкой параметра σ Доверительная оценка (3) с учетом формулы (4) из § 8.5 принимает вид

$$\left|a - \bar{x}_{\text{в}}\right| < \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}}.$$

Пример По данным девяти независимых равноточных измерений физической величины найдены среднее арифметическое результатов отдельных измерений $x = 42{,}319$ и «исправленное» среднее квадратическое отклонение $s = 5{,}0$. Требуется оценить истинное значение a измеряемой величины с надежностью $\gamma = 0{,}99$.

Истинное значение измеряемой величины равно ее математическому ожиданию. Поэтому задача сводится к оценке математического ожидания (при неизвестном σ) при помощи доверительного интервала $x - \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}} < a < x + \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}}$, покрывающего a с заданной надежностью $\gamma = 0{,}99$.

Пользуясь таблицей приложения 4 по $\gamma = 0{,}99$ и $n = 9$, находим $t_\gamma = 3{,}36$. Найдем точность оценки:

$$\delta = \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}} = 3{,}36 \cdot \frac{5}{\sqrt{9}} = 3{,}36 \cdot \frac{5}{3} = 5{,}60.$$

Концы доверительного интервала

$$42{,}319 - 5{,}60 = 36{,}719 \text{ и}$$
$$42{,}319 + 5{,}60 = 47{,}919.$$

Итак, с надежностью $\gamma = 0{,}99$ истинное значение измеренной величины a заключено в доверительном интервале $36{,}719 < a < 47{,}919$.

3. Оценка точности измерений

Предполагается, что измерения являются независимыми и равноточными (с одной и той же дисперсией), а их погрешности — случайными, причем распределены они по нормальному закону. В качестве показателя точности измерений оценивается дисперсия этого закона σ^2 или средняя квадратическая погрешность σ.

Точечные оценки дисперсии.

1. Если измеряют известную величину a, то в качестве эффективной оценки дисперсии σ^2 применяют квадрат среднего квадратического отклонения s^* результатов измерений (1) от значения a:

$$\sigma^2 \approx s^{*2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - a\right)^2 .$$

2. При измерениях неизвестной величины в качестве оценки дисперсии σ^2 применяют эмпирическую дисперсию s^2 :

$$\sigma^2 \approx s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}_{\text{в}}\right)^2, \tag{6}$$

где $\bar{x}_{\text{в}}$ — среднее арифметическое значений $x_1, x_2, ..., x_n$. Оценка (6) является несмещенной и состоятельной, но не является эффективной (она асимптотически эффективна, т.е. ее дисперсия стремится к наименьшему значению при неограниченном увеличении числа измерений n).

Доверительные оценки средней квадратической погрешности.

В теории ошибок принято точность измерений (точность прибора) характеризовать с помощью среднего квадратического отклонения σ случайных ошибок измерений. Для оценки σ используют «исправленное» среднее квадратическое отклонение s. Поскольку обычно результаты измерений независимы, имеют одно и то же математическое ожидание (истинное значение измеряемой величины) и одинаковую дисперсию (в случае равноточных измерений), то утверждение, приведенное в § 8.5, п. 4, применимо для оценки точности измерений.

Пример. По 16 независимым равноточным измерениям найдено «исправленное» среднее квадратическое отклонение $s = 0{,}4$. Найдем точность измерений с надежностью $\gamma = 0{,}99$.

Как отмечено выше, точность измерений характеризуется средним квадратическим отклонением σ случайных ошибок измерений. Поэтому задача сводится к отысканию доверительного интервала $(s - sq;\ s + sq)$, покрывающего σ с заданной надежностью $\gamma = 0{,}99$ (см. п. 4). По таблице приложения 5 по $\gamma = 0{,}99$ и $n = 16$ найдем $q = 0{,}70$. Следовательно, искомый доверительный интервал таков:

$$0{,}4 \cdot (1 - 0{,}70) < \sigma < 0{,}4 \cdot (1 + 0{,}70),$$

или

$$12 < \sigma < 0{,}68.$$

§ 8.9. МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

В естествознании приходится пользоваться эмпирическими формулами, составленными на основе опыта и наблюдений. Один из наилучших методов получения таких формул — это способ *наименьших квадратов.* Изложим идею этого способа, ограничиваясь случаями линейной и квадратичной зависимостями.

Пусть требуется установить зависимость между двумя величинами x и y (например, температурой и удлинением металлического стержня). Производим соответствующие измерения (например, n измерений) и результаты измерений сводим в таблицу:

x	x_1	x_2	x_3	...	x_n
y	y_1	y_2	y_3	...	y_n

Будем рассматривать x и y как прямоугольные координаты точек на плоскости. Предположим, что точки (x_k, y_k), $k = 1, ..., n$ группируются вдоль некоторой прямой линии (рис. 51). Естественно в этом случае считать, что между x и y существует приближенная линейная зависимость, т.е.

$$y = ax + b. \qquad (1)$$

Назовем *уклонением* (или *отклонением)* разность между точным значением функции (1) в точке x_k и соответствующим значением y_k из таблицы: $\varepsilon_k = ax_k + b - y_k$. Сумма квадратов уклонений — функция величин a и b:

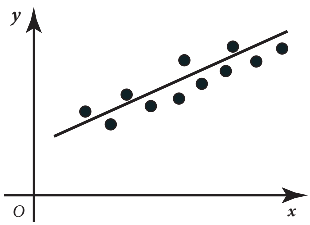


Рис 51

$$U(a,b)=\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k^2=\sum_{k=1}^{n}\left(ax_k+b-y_k\right)^2 .$$

В методе наименьших квадратов на величины a и b накладывается условие — они должны доставлять минимум сумме квадратов уклонений $U(a, b)$. Требуется найти a и b, удовлетворяющие этому условию. Для этого необходимо, чтобы

$$\frac{\partial U}{\partial a}=2\sum_{k=1}^{n}\left(ax_k+b-y_k\right)x_k=2a\sum_{k=1}^{n}x_k^2+2b\sum_{k=1}^{n}x_k-2\sum_{k=1}^{n}x_k y_k=0,$$

$$\frac{\partial U}{\partial b}=2\sum_{k=1}^{n}\left(ax_k+b-y_k\right)=2a\sum_{k=1}^{n}x_k+2bn-2\sum_{k=1}^{n}y_k=0.$$

Отсюда

$$\begin{cases} a\sum_{k=1}^{n}x_k^2+b\sum_{k=1}^{n}x_k=\sum_{k=1}^{n}x_k y_k, \\ a\sum_{k=1}^{n}x_k+bn=\sum_{k=1}^{n}y_k. \end{cases} \tag{2}$$

Это — окончательный вид, так называемой, нормальной системы способа наименьших квадратов. Пусть $a = a_0$, $b = b_0$ — решение системы (2), Можно доказать, что a_0 и b_0 доставляют величине $U(a, b)$ минимум. Функция (1) при $a = a_0$ и $b = b_0$ дает эмпирическую формулу $y = a_0x + b_0$.

В случае квадратичной зависимости нормальная система, из которой определяются значения параметров a, b и с эмпирической формулы

$$y = ax^2 + bx + c,$$

будет иметь вид:

$$a\sum_{k=1}^{n}x_k^4+b\sum_{k=1}^{n}x_k^3+c\sum_{k=1}^{n}x_k^2=\sum_{k=1}^{n}x_k^2 y_k,$$

$$a\sum_{k=1}^{n}x_k^3+b\sum_{k=1}^{n}x_k^2+c\sum_{k=1}^{n}x_k=\sum_{k=1}^{n}x_k y_k,$$

$$a\sum_{k=1}^{n}x_k^2+b\sum_{k=1}^{n}x_k^2+nc=\sum_{k=1}^{n}y_k.$$

П р и м е р 1. Получены следующие результаты измерений величин x и y:

x_i	–2	0	1	2	4
y_i	0,5	1	1,5	2	3

Установить зависимость между этими величинами и определить параметры эмпирической формулы методом наименьших квадратов.

Будем считать, что соответствующие пары значений (x_i, y_i) $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ являются прямоугольными декартовыми координатами точек на плоскости. Построив точки $A_1(-2; 0{,}5)$, $A_2(0; 1)$, $A_3(1; 1{,}5)$, $A_4(2; 2)$, $A_4(4; 3)$, обнаружим, что они незначительно отклоняются от некоторой прямой. Значит, можно предположить, что между величинами x и y существует приближенная линейная зависимость, т.е. $y = ax + b$, где a и b пока не известны. Методом наименьших квадратов определим параметры a и b эмпирической формулы $y = ax + b$, используя нормальную систему уравнений (2). Здесь $n = 5$.

$$\sum_{k=1}^{5} x_k^2 = 25\,, \quad \sum_{k=1}^{5} x_k = 5\,, \quad \sum_{k=1}^{5} x_k y_k = 16{,}5\,, \quad \sum_{k=1}^{5} y_k = 8\,,$$

и нормальная система (2) принимает вид

$$\begin{cases} 25a + 5b = 16{,}5, \\ 5a + 5b = 8. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем $a = 0{,}425$, $b = 1{,}175$. Поэтому $y = 0{,}425x + 1{,}175$.

Пример 2. Найти параметры a, b, c эмпирической формулы $y = ax^2 + bx + c$ по результатам измерений:

x	–3	–2	–1	0	1	2
y	–1,4	–4,3	–5,2	–4,1	–1,1	4,2

Результаты измерений и итоги их обработки представим в таблице :

i	x_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	y_i	$y_i x_i$	$y_i x_i^2$
1	–3	9	-27	81	–1,4	4,2	–12,6
2	–2	4	-8	16	–4,3	8,6	–17,2
3	–1	1	-1	1	–5,2.	5,2	–5,2
4	0	0	0	0	–4,1	0	0
5	1	1	1	1	–1,1	–1,1	–1,1
6	2	4	8	16	4,2	8,4	16,8
Σ	–3	19	–27	115	–11,9	25,3	–19,3

Система уравнений в данном случае принимает вид $115a - 27b + 19c = -19{,}3$; $-27a + 19b - 3c = 25{,}3$; $19a - 3b + 6c = -11{,}9$.
Решив эту систему, получим $a = 1{,}011$; $b = 2{,}116$; $c = -4{,}126$. Следовательно, $y = 1{,}011x^2 + 2{,}116x - 4{,}126$.

Освещение других вопросов, связанных с методом наименьших квадратов, см., например, в [9].

Упражнения

1. Проставить ранги ряду чисел 27, 28, 40, 16, 15 двумя способами

2. В результате тестирования группа абитуриентов набрала баллы 7, 5, 2, 3, 6, 4, 7, 6, 3, 7. Записать полученную выборку в виде: а) вариационного ряда; б) статистического ряда.

3. Построить эмпирическую функцию по данному распределению выборки

варианты x_i	2	6	10
частоты n_i	6	9	15

4. Построить полигон по данному распределению:

а)

x_i	1	4	5	7
n_i	20	10	14	6

;

б)

x_i	2	4	5	7	10
p_i^*	0,15	0,2	0.1	0,1	0,45

5. Построить гистограмму по данному распределению выборки объема n =100:

Частичный интервал	Сумма частот вариант частичного интервала n_i
1—5	10
5—9	20
9—13	50
13—17	12
17—21	8

6. Построить гистограмму (с переходом к относительным частотам) по данному распределению выборки:

Частичный интервал	Сумма частот вариант частичного интервала n_i
0—2	20
2—4	30
4—6	50

7. Генеральная совокупность задана таблицей распределения:

x_i	186	192	194
N_i	2	5	3

Найти генеральную среднюю $\overline{x}_г$ и генеральную дисперсию $D_г$.

8. Из генеральной совокупности извлечена выборка объема $n = 60$:

Варианта x_i	1	3	6	26
Частота n_i	8	40	10	2

Найти выборочную среднюю.

9. Выборочная совокупность задана таблицей распределения:

x_i	2	5	7	10
n_i	16	12	8	14

Найти выборочную среднюю.

10. Найти выборочную среднюю по данному распределению выборки объема $n = 10$:

x_i	1250	1270	1280
n_i	2	5	3

11. Найти выборочную среднюю по следующим данным: а) длина крыла у 6 пчел (в мм): 9,68; 9,81; 9,77; 9,60; 9,61; 9,55; б) длина листьев садовой земляники (в см): 5,2; 5,6; 7,1; 6,6; 8,6; 8,2; 7,7;7,8.

12. Найти выборочную дисперсию по данному распределению выборки объема $n = 10$:

x_i	0,01	0,04	0,08
n_i	5	3	2

13. По выборке объема $n = 41$ найдена выборочная дисперсия $D_в = 3$. Найти исправленную дисперсию.

14. Найти исправленную выборочную дисперсию по данному распределению выборки объема $n= 10$:

x_i	102	104	108
n_i	2	3	5

15. Найти исправленную выборочную дисперсию по данному распределению выборки объема $n = 20$:

x_i	0,1	0,5	0,07	0,9
n_i	6	12	1	1

16. В итоге пяти измерений длины стержня одним прибором (без систематических ошибок) получены следующие результаты (в мм): 92, 94, 103, 105, 106. Найти выборочную среднюю длины стержня, а также выборочную и исправленную дисперсии ошибок прибора.

17. Ниже приведены результаты измерения роста случайно отобранных 100 студентов.

Рост, см	154—158	158—162	162—166	166—170	170—174	174—178	178—182
Число сту-дентов	10	14	26	28	12	8	2

Найти выборочную среднюю и выборочную дисперсию роста обследованных студентов.

Указание. Найти середины интервалов и принять их в качестве вариант.

18. Найти доверительный интервал для оценки с надежностью 0,95 неизвестного математического ожидания a нормально распределенного признака X генеральной совокупности, если даны генеральное среднее квадратическое отклонение $\sigma = 5$, выборочная средняя $\bar{x}_\text{в} = 14$ и объем выборки $n = 25$.

19. Найти доверительный интервал для оценки с надежностью 0,99 неизвестного математического ожидания a нормально распределенного признака X генеральной совокупности, если даны генеральное среднее квадратическое отклонение σ, выборочная средняя $\bar{x}_\text{в}$ и объем выборки n:

а) $\sigma = 4$, $\bar{x}_\text{в} = 10{,}2$, $n = 16$;

б) $\sigma = 5$, $\bar{x}_\text{в} = 16{,}8$, $n = 25$.

20. Из генеральной совокупности извлечена выборка объема $n = 10$:

Варианта x_i	-2	1	2	3	4	5
Частота n_i	2	1	2	2	2	1

Пользуясь распределением Стьюдента, оценить с надежностью 0,95 математическое ожидание a нормально распределенного признака генеральной совокупности по выборочной средней при помощи доверительного интервала

Заданы среднее квадратическое отклонение, выборочная средняя и объем выборки нормально распределенного признака генеральной совокупности. Найдите границы доверительных интервалов для оценки генеральной средней $\bar{x}_г$ с заданной надежностью.

21. $\sigma = 3$; $\bar{x}_в = 4{,}1$; $n = 36$; $\gamma = 0{,}95$.

22. $\sigma = 3$; $\bar{x}_в = 20{,}12$; $n = 25$; $\gamma = 0{,}99$.

Заданы «исправленное» среднее квадратическое отклонение, выборочная средняя и объем выборки нормально распределенного признака генеральной совокупности. Найдите, пользуясь распределением Стьюдента, доверительные интервалы для оценки генеральной средней $\bar{x}_г$ с заданной надежностью.

23. $s = 0{,}8$; $\bar{x}_в = 20{,}2$; $n = 16$; $\gamma = 0{,}95$.

24. $s = 2{,}4$; $\bar{x}_в = 14{,}2$; $n = 9$; $\gamma = 0{,}99$.

25. Признак X генеральной совокупности распределен нормально. По выборке объема $n = 25$ найдено «исправленное» среднее квадратическое отклонение $s = 0{,}8$. Найдите доверительный интервал, покрывающий генеральное среднее квадратическое отклонение σ с надежностью 0,95.

26. Вычислите выборочный коэффициент корреляции по данным следующей таблицы:

x_i	92	91	90	86	85	85	85	83	80	78	80	83
y_i	84	85	84	81	76	77	75	79	78	78	76	75

27. По выборке объема $n = 122$, извлеченной из нормальной двумерной совокупности, найден выборочный коэффициент корреляции $r_в = 0{,}4$. При уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу о равенстве нулю генерального коэффициента корреляции при конкурирующей гипотезе H_1: $r_г \neq 0$.

При уровне значимости 0,05 проверьте гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности, если известны эмпирические и теоретические частоты:

28.

Эмпирические частоты	6	12	16	40	13	8	5
Теоретические частоты	4	11	15	43	15	6	6

29.

Эмпирические частоты	5	13	12	44	8	12	6
Теоретические частоты	2	20	12	35	15	10	6

30. Найти выборочный коэффициент ранговой корреляции Спирмена по данным ранга объектов выборки объемом $n = 10$:

r_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
s_i	4	3	5	8	6	1	7	10	2	9

Значима ли ранговая корреляционная связь при уровне значимости 0,05?

31. По данным девяти независимых равноточных измерений физической величины найдены среднее арифметическое результатов отдельных измерений $\overline{x}_в = 42{,}319$ и «исправленное» среднее квадратическое отклонение $s = 5$. Требуется оценить истинное значение a измеряемой величины с надежностью 0,95.

32. По 15 равноточным измерениям найдено «исправленное» среднее квадратическое отклонение $s = 0{,}12$. Найдите точность измерений σ с надежностью 0,99.

33. По данным 16 независимых равноточных измерений физической величины найдены среднее арифметическое результатов отдельных измерений $\overline{x}_в = 23{,}161$ и «исправленное» среднее квадратическое отклонение $s = 0{,}4$. Требуется оценить истинное значение a измеряемой величины и точность измерений σ с надежностью 0,95.

34 Приводятся данные о внесении минеральных удобрений и урожае сахарной свеклы с 1 гектара за 5 лет.

Год	Минеральные удобрения	Урожай с 1 га, Т.
1971	4	20
1972	5	24
1973	6	29
1974	8	35
1975	9	50

Предполагая линейную зависимость урожайности от количества внесенных удобрений $y = ax + b$, найдите по этим данным коэффициенты a и b, применяя способ наименьших квадратов

ПРИЛОЖЕНИЯ

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

ТАБЛИЦЫ ПРОИЗВОДНЫХ И ИНТЕГРАЛОВ

Таблица производных

1. $(u^{\alpha})' = \alpha u^{\alpha-1}u'$.
2. $(a^{u})' = a^{u}u'\ln a$.
3. $(e^{u})' = e^{u}u'$.
4. $\left(\log_a u\right)' = \frac{u'}{u\ln a}$.
5. $\left(\ln u\right)' = \frac{u'}{u}$.
6. $(\sin u)' = u'\cos u$.
7. $(\cos u)' = - u'\sin u$.
8. $\left(\mathrm{tg}\ u\right)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$.
9. $\left(\mathrm{ctg}\ u\right)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$.
10. $\left(\arcsin u\right)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$.
11. $\left(\arccos u\right)' = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$.
12. $\left(\mathrm{arctg}\, u\right)' = \frac{u'}{1+u^2}$.
13. $\left(\mathrm{arcctg}\, u\right)' = \frac{-u'}{1+u^2}$.

Здесь $u = u(x)$ и $\upsilon = \upsilon(x)$ — дифференцируемые функции.

Таблица интегралов

1. $\int x^{\mu} dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C$ $(\mu \neq -1)$.

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$.

3. $\int a^{x} dx = \frac{a^{x}}{\ln a} + C$.

4. $\int e^{kx} dx = \frac{e^{kx}}{k} + C$.

5. $\int \sin ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax + C$.

6. $\int \cos ax dx = \frac{1}{a} \sin ax + C$.

7. $\int \frac{dx}{cos^2 ax} = \frac{1}{a} \operatorname{tg} ax + C$.

8. $\int \frac{dx}{\sin^2 ax} = -\frac{1}{a} \operatorname{ctg} ax + C$.

9. $\int \frac{xdx}{x^2+a} = \frac{1}{2} \ln\left|x^2 + a\right| + C$.

10. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$.

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$.

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + C$.

13. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$.

14. $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (интеграл Эйлера-Пуассона).

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Таблица значений функции $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765·	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209·	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180

Окончание таблицы

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Таблица значений функции $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	Ф(x)
0,00	0,0000	0,25	0,0987	0,50	0,1915	0,75	0,2734
0,01	0,0040	0,26	0,1026	0,51	0,1950	0,76	0,2764
0,02	0,0080	0,27	0,1064	0,52	0,1985	0,77	0,2794
0,03	0,0120	0.28	0,1103	0,53	0,2019	0,78	0,2823
0,04	0,0160	0,29	0,1141	0,54	0,2054	0,79	0,2852
0,05	0,0199	0,30	0,1179	0,55	0,2088	0,80	0,2881
0,06	0,0239	0,31	0,1217	0,56	0,2123	0,81	0,2910
0,07	0,0279	0,32	0,1255	0,57	0,2157	0,82	0,2939
0,08	0,0319	0,33	0,1293	0,58	0,2190	0,83	0,2967
0,09	0,0359	0,34	0,1331	0,59	0,2224	0,84	0,2995
0,10	0,0398	0,35	0,1368	0,60	0,2257	0,85	0,3023
0,11	0,0438	0,36	0,1406	0,61	0,2291	0,86	0,3051
0,12	0,0478	0,37	0,1443	0,62	0,2324	0,87	0,3078
0,13	0,0517	0,38	0,1480	0,63	0,2357	0.88	0,3106
0,14	0,0557	0,39	0,1517	0,64	0,2389	0,89	0,3133
0,15	0,0596	0,40	0,1554	0,65	0,2422	0,90	0,3159
0,16	0,0636	0,41	01591	0,66	0,2454	0,91	0,3186
0,17	0,0675	0,42	0 1628	0,67	0,2486	0,92	0,3212
0,18	0,0714	0,43	0,1664	0,68	0,2517	0,93	0,3238
0,19	0,0753	0,44	0 1700	0,69	0,2549	0,94	0 3264
0,20	0,0793	0,45	0,1736	0,70	0,2580	0,95	0,3289
0,21	0,0832	0 46	0.1772	0,71	0,2611	0,96	0,3315
0,22	0,0871	0 47	0,1808	0,72	0,2642	0,97	0,3340
0,23	0,0910	0,48	0,1844	0,73	0,2673	0,98	0,3365
0,24	0,0948	0,49	0,1879	0,74	0,2703	0,99	0,3389

Продолжение таблицы

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	Ф(x)
1,00	0,3413	1,31	0,4049	1,62	0,4474	1,93	0,4732
1,01	0,3438	1,32	0,4066	1,63	0,4484	1,94	0,4738
1,02	0,3461	1,33	0,4082	1.64	0,4495	1,95	0,4744
1,03	0,3485	1,34	0,4099	1,65	0,4505	1,96	0,4750
1,04	0,3508	1,35	0,4115 ·	1,66	0,4515	1,97	0,4756
1,05	0,3531	1,36	0,4131	1,67	0,4525	1,98	0,4761
1,06	0,3554	1,37	0,4147	1,68	0,4535	1,99	0,4767
1,07	0,3577	1,38	0,4162	1,69	0,4545	2,00	0,4772
1,08	0,3599	1 39	0,4177	1,70	0,4554	2,02	0,4783
1,09	0,3621	1,40	0,4192	1,71	0,4564	2,04	0,4793
1,10	0,3643	1.41	0,4207	1,72	0,4573	2,06	0,4803
1,11	0,3665	1,42	0,4222	1,73	0,4582	2,08	0,4812
1,12	0,3686	1,43	0,4236	1,74	0,4591	2,10	0,4821
1.13	0,3708	1,44	0,4251	1,75	0,4599	2.12	0,4830
1,14	0,3729	1,45	0,4265	1,76	0,4608	2,14	0,4838
1,15	0,3749	1,46	0,4279	1,77	0,4616	2,16	0,4846
1,16	0,3770	1,47	0,4292	1,78	0,4625	2,18	0,4854
1,17	0,3790	1,48	0,4306	1,79	0,4633	2,20	0,4861
1,18	0,3810	1,49	0,4319	1,80	0,4641	2,22	0,4868
1,19	0,3830	1,50	0,4332	1,81	0,4649	2,24	0,4875
1,20	0.3949	1,51	0,4345	1,82	0,4656	2,26	0,4881
1,21	0,3869	1,52	0,4357	1,83	0,4664	2,28	0,4887
1,22	0,3888	1,53	0,4370	1,84	0,4571	2,30	0,4893
1,23	0,3907	1,54	0,4382	1,85	0,4678	2,32	0,4898
1,24	0,3925	1,55	0,4394	1,86	0,4686	2,34	0,4904
1,25	0,3944	1,56	0,4406	1,87	0,4693	2,36	0,4909
1,26	0,3962	1,57	0,4418	1,88	0,4699	2,38	0,4913
1,27	0,3980	1,58	0,4429	1,89	0,4706	2,40	0,4918
1,28	0,3997	1,59	0,4441	1,90	0,4713	2,42	0,4922
1,29	0,4015	1,60	0,4452	1,91	0,4719	2,44	0,4927
1,30	0,4032	1,61	0,4463	1,92	0,4726	2,46	0,4931

Окончание таблицы

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
2,48	0,4934	2,66	0,4961	2,80	0,4974	2,98	0,4986
2,50	0,4938	2,64	0,4959	2,82	0,4976	3,00	0,49865
2,52	0,4941	2,66	0,4961	2,84	0,4977	3,20	0,49931
2,54	0,4945	2,68	0,4963	2,86	0,4979	3,40	0,49966
2,56	0,4948	2,70	0,4965	2,88	0,4980	3,60	0,499841
2,58	0,4951	2,72	0,4967	2,90	0,4981	3,80	0,499928
2,60	0,4953	2,74	0,4969	2,92	0,4982	4,00	0,499968
2,62	0,4956	2,76	0,4971	2,94	0,4984	4,50	0,499997
2,64	0,4959	2,78	0,4973	2,96	0,4985	5,00	0,500000

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

Таблица значений $t_\gamma = t(\gamma, n)$

n \ γ	0,95	0,99	0,999	n \ γ	0,95	0,99	0,999
5	2,78	4,60	8,61	20	2,093	2,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86	25	2,064	2,797	3,745
7	2,45	3,71	5,96	30	2,045	2,756	3,659
8	2,37	3,50	5,41	35	2,032	2,720	3,600
9	2,31	3,36	5,04	40	2,023	2,708	3,558
10	2,26	3,25	4,78	45	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59	50	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4 44	60	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	70	1.996	2,649	3,439
14	2,16	3,01	4,22	80	1,991	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14	90	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,95	4,07	100	1,984	2,627	3,392
17	2,12	2,92	4,02	120	1,980	2,617	3,374
18	2,11	2,90	3,97	∞	1,960	2,576	3,291
19	2,10	2,88	3,92				

ПРИЛОЖЕНИЕ 5

Таблица значений $q = q(\gamma, n)$

n \ γ	0,95	0,99	0,999	n \ γ	0,95	0,99	0.999
5	1,37	2,67	5,64	20	0,37	0,58	0,88
6	1,09	2,01	3,88	25	0,32	0,49	0,73
7	0,92	1,62	2,98	30	0,28	0,43	0,63
8	0,80	1,38	2,42	35	0,26	0,38	0,56
9	0,71	1,20	2,06	40	0,24	0,35	0,50
10	0,65	1,08	1,80	45	0,22	0,32	0,46
11	0,59	0,98	1,60	50	0,21	0,30	0,43
12	0,55	0,90	1,45	60	0,188	0,269	0,38
13	0,52	0,83	1,33	70	0,174	0,245	0,34
14	0,48	0,78	1,23	80	0,161	0,226	0,31
15	0,46	0,73	1,15	90	0,151	0,211	0,29
16	0,44	0,70	1,07	100	0,143	0,198	0,27
17	0,42	0,66	1,01	150	0,115	0,160	0,221
18	0,40	0,63	0,96	200	0,099	0,136	0,185
19	0,39	0,60	0,92	250	0,089	0,120	0,162

ПРИЛОЖЕНИЕ 6

Критические точки распределения Стьюдента

Число степеней свободы *k*	Уровень значимости α (двусторонняя критическая область)					
	0, 10	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001
1	6,31	12,7	31,82	63,7	318,3	637,0
2	2,92	4,30	6,97	9,92	22,33	31,6
3	2,35	3,18	4,54	5,84	10,22	12,9
4	2,13	2,78	3,75	4,60	7,17	8,61
5	2,01	2,57	3,37	4,03	5,89	6,86
6	1,94	2,45	3,14	3,71	5,21	5,96
7	1,89	2,36	3,00	3,50	4,79	5,40
8	1,86	2,31	2,90	3,36	4,50	5,04
9	1,83	2,26	2,82	3,25	4,30	4,78
10	1,81	2,23	2,76	3,17	4,14	4,59
11	1,80	2,20	2,72	3,11	4,03	4,44
12	1.78	2,18	2,68	3,05	3,93	4,32
13	1,77	2,16	2,65	3,01	3,85	4,22
14	1,76	2,14	2,62	2,98	3,79	4,14
15	1,75	2,13	2,60	2,95	3,73	4,07
16	1,75	2,12	2,58	2,92	3,69	4,01
17	1,74	2,11	2,57	2,90	3,65	3,96
18	1,73	2,10	2,55	2,88	3,61	3,92
19	1,73	2,09	2,54	2,86	3,58	3,88
20	1,73	2,09	2,53	2,85	3,55	3,85
21	1,72	2,08	2,52	2,83	3,53	3,82
22	1,72	2,07	2,51	2,82	3,51	3,79
23	1,71	2,07	2,50	2,81	3,49	3,77
24	1,71	2,06	2,49	2,80	3,47	3,74
25	1,71	2,06	2,49	2,79	3,45	3,72
26	1,71	2,06	2,48	2,78	3,44	3,71
27	1,71	2,05	2,47	2,77	3,42	3,69

Окончание таблицы

Число степеней свободы k	Уровень значимости α (двусторонняя критическая область)					
	0, 10	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001
28	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
29	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
30	1,70	2,04	2,46	2,75	3,39	3,65
40	1,68	2,02	2,42	2,70	3,31	3,55
60	1,67	2,00	2,39	2,66	3,23	3.46
120	1,66	1,98	2,36	2,62	3,17	3,37
∞	1,64	1,96	2,33	2,58	3,09	3,29

ПРИЛОЖЕНИЕ 7

Таблица значений χ^2 в зависимости от *p* и *k*

k \ *p*	0,05	0,01	0,001
1	3,84	6,64	10,83
2	5,99	9,21	13,82
3	7,82	11,34	16,27
4	9,49	13,28	18,46
5	11,07	15,09	20,5
6	12,59	16,81	22,5
7	14,07	18,48	24,3
8	15,51	20,1	26,1
9	16,92	21,7	27,9
10	18,31	23,2	29,6
11	19,68	24,7	31,3
12	21,0	26,2	32,9
13	22,4	27,7	34,6
14	23,7	29,1	36,1
15	25,0	30,6	37,7
16	26,3	32,0	39,3
17	27,6	33,4	40,8
18	28,9	34,8	42,3
19	30,1	36,2	43,8
20	31,4	37,6	45,3
21	32,7	38,9	46,8
22	33,9	40,3	48,3
23	35,2	41,6	49,7
24	36,4	43,0	51,2
25	37,7	44,3	52,6
26	38,9	45,6	54,1

Окончание таблицы

k \ p	0,05	0,01	0,001
27	40,1	47,0	55,5
28	41,3	48,3	56,9
29	42,6	49,6	58,3
30	43,8	50,9	59,7

ПРИЛОЖЕНИЕ 8

Латинский алфавит

Буквы	Название	Буквы	Название
Aa	а	Nn	эн
Bb	бэ	Oo	о
Cc	цэ	Pp	пэ
Dd	дэ	Qq	ку
Ee	э	Rr	эр
Ff	зф	Ss	эс
Gg	гэ (жэ)*	Tt	тэ
Hh	ха (аш)	Uu	у
Ii	и	Vv	вэ
Jj	йот (жи)	Ww	дубль-вэ
Кк	ка	Xx	икс
Ll	эль	Yy	игрек
Мт	эм	Zz	зэт

* В скобхах даны французские названия этих букв.

ПРИЛОЖЕНИЕ 9

Греческий алфавит

Буквы	Название	буквы	Название
Α α	альфа	Ν ν	Ню
Β β	бета	Ξ ξ	кси
Γ γ	гамма	Ο ο	омикрон
Δ δ	дельта	Π π	пи
Ε ε	эпсилон	Ρ ρ	ро
Ζ ζ	дзета	Σ σ	сигма
Η η	эта	Τ t	тау
Θ θ	тета	ϒ υ	ипсилон
Ι ι	йота	Φ φ	фи
Κ κ	каппа	Χ χ	хи
Λ λ	ламбда	Ψ ψ	пси
Μ μ	мю	Ω ω	омега

Список литературы.

1. Артемьева Е.Ю., Мартынов Е.М. Вероятностные методы в психологии. Издательство Московского университета. — М.: 1975.

2. Аршинов М.Н., Садовский Л.Е. Коды и математика (рассказы о кодировании). — М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1983. (Библиотечка «Квант». Вып. 130).

3. Баврин И.И. Дискретная математика: Учебник для студентов естественнонаучных специальностей и специальности «Информатика» педагогических вузов. — М.: Высш.шк., 2007, ил.

4. Баврин И.И. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник для студентов естественнонаучных специальностей педагогических вузов. — М.: Высш.шк., 2005.

5. Бешенков С.А., Ракитина Е.А. Моделирование и формализация. Методическое пособие. — М.: Лаборатория Базовых знаний, 2002.

6. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. Учеб. пособие для вузов. Изд. 6-е стер. — М.: Высш.шк., 1997. ил.

7. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. М.: Наука.1988.

8. Гроссман С., Тернер Дж. Математика для биологов: Пер с англ. — М.: Высшая школа, 1983.

9. Гусак А.А. Высшая математика. — Минск. Тетра системс. 2000. Т. 2.

10. Давыдов В.В. Виды обобщений в обучении/Логико-психологические проблемы построения учебных предметов. — М.: Педагогика, 1972.

11. Ермолаев О.Ю. Математическая статистика для психологов: Учебник. — М.: Московский психолого-социальный институт: Флинта, 2002. — (Библиотека психолога).

12. Калинина В.Н., Панкин В.Ф. Математическая статистика: — М.: Высшая школа, 1998.

13. Крамер Г. Математические методы статистики. — М.: Мир, 1975.

14. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. — М.: Наука, 1965.

15. Михеев В.И. Методика получения и обработки экспериментальных данных в психолого-педагогических исследованиях. М.: Университет дружбы народов, 1986.

16. Новиков П.С. Элементы математической логики. М.: Наука, 1973.

17. Оре О. Графы и их применения. М.: Лир, 1965.

18. Суходольский Т.В. Основы математической статистики для психологов. Издательство Ленинградского университета. — Ленинград.: 1972.

19. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и её приложения./Пер. с англ. М.: Мир, 1984. Т. 1

20. Фридман Л.М. Психолого-педагогические основы обучения математике в школе. — М.: Просвещение, 1983.

Ответы к упражнениям

Глава 1

1. а) равны; б) равны; в) не равны.
2. а) $\{5; 6\} \subset \{5; 6; 8\}$; б) $5 \in \{5; 6; 8\}$; в) $2 \in N$.
3. б) пустое множество; г) пустое множество.
4. $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$, $A \cap B = \{3; 4; 5; 6\}$.
5. $A \cup B = N$, $A \cap B = \varnothing$.
6. $S = \{1; 2\}$.
7. $A \setminus B = N \setminus B = \{1; 3; 5; \ldots\}$.
8. $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1; 2\}, \{1; 3\}, \{2; 3\}, \{1, 2, 3\}, \varnothing$.
9. а) C; б) $\{-2; -1; 0; 1; 2\}$; в) C; г) A; д) C.

Глава 2.

1. 6840.
2. 360.
3. 6.
4. 720.
5. 45.
6. 15.

Глава 3.

1. а) $\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 4 & 7 & 11 \\ 4 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.
2. а) $\begin{pmatrix} 19 & 9 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 1 & 11 \\ 13 & 0 \end{pmatrix}$.
3. а) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 43 & 10 \\ 49 & 11 \\ 37 & 9 \end{pmatrix}$.
4. 26.
5. -38.
6. 1.
7. 2695.
8. 72.

9. -240.
10. -10.
11. 513.
12. $-2b^2$.
13. а) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

14. $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$.
15. а) $x = -7$, $y = 5$, б) $x = 1, y = 2, z = 3$.

Глава 4.

1. G_1 — G_8 — неориентированные, а G_9 и G_{10} — ориентированные; G_1 и G_2 — полные; все вершины графа G_3 изолированные (граф с пустым множеством ребер); G_4 и G_5 являются дополнением друг другу; G_6 — мультиграф; G_7 — не является полным графом; G_8 — псевдограф; G_{10} — ориентированный мультиграф.

2. Степени вершин графа G_1: $\delta(1) = 3$, $\delta(2) = 4$, $\delta(3) = 3$, $\delta(4) = 4$;

степени вершин орграфа G_2: $\delta^+(1) = 2$, $\delta^+(2) = 3$, $\delta^+(3) = 1$, $\delta^+(4) = 1$, $\delta^-(1) = 1$, $\delta^-(2) = 1$, $\delta^-(3) = 2$, $\delta^-(4) = 3$.

3. $A(G_1)=$

1	2	3	4	
0	2	1	0	1
2	0	1	1	2
1	1	0	1	3
0	1	1	1	4

$A(G_2)=$

1	2	3	4	
0	1	1	0	1
1	0	1	1	2
0	0	0	1	3
0	0	0	1	4

4.

4. $A(G_1)=$

a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	
1	1	1	0	0	0	0	1
1	1	0	1	1	0	0	2
0	0	1	1	0	1	0	3
0	0	0	0	1	1	1	4

$A(G_2)=$

a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	
-1	1	-1	0	0	0	0	1
1	-1	0	-1	-1	0	0	2
0	0	1	1	0	-1	0	3
0	0	0	0	1	1	2	4

5.

Ребра	Вершины
a	1 2
b	2 1
c	1 3
d	2 3
e	2 4
f	3 4
g	4 4

6. Изоморфны.

7. Для вершин υ_1 и υ_6 графа G: маршрут, не являющийся цепью, - $(e_1, e_2, e_3\, e_4, e_5, e_1\, e_8, e_7, e_6, e_1, e_8, e_7)$ или $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_1, e_8, e_7)$ и т.п.; цепь, не являющаяся простой цепью, — $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6)$; простая цепь — (e_1, e_6) или (e_8, e_7).

8. Для вершины υ_1: циклический маршрут, не являющийся циклом, $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_1, e_6, e_7, e_8)$, цикл, не являющийся простым циклом, - $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8)$; простой цикл — (e_1, e_6, e_7, e_8).

9. Для G_1: $d(\upsilon_1, \upsilon_2) = 1$, $d(\upsilon_1, \upsilon_1) = d(\upsilon_2, \upsilon_2) = 0$, центры — обе вершины υ_1 и υ_2, $r\,(G_1) = 1$. Для G_2: $d(\upsilon_3, \upsilon_3) = 0$, центр вершина υ_3, $r(G_2) = 0$.

Для G_3: $d(v_4, v_5) = d(v_5, v_6) = 1$, $d(v_4, v_6){=}2$, $d(v_4, v_4) = 0$ и т. д., центр — вершина υ_5, $r(G_3) = 1$.

10. Пятиугольник эйлеров цикл имеет, а четырехугольная пирамида его не имеет

11. Не имеют.

12. Одна вершина максимального 4-го типа.

13. 1; 3; 2.

Глава 5

3. Все четыре функции являются тождественными единицами.

5. а) $x_1 \to x_2$; б) $x_1 \nrightarrow x_2$; в) $x_1 \downarrow x_2$; г) $x_1 \wedge x_2$.

6. а) 1; б) $x_1 \vee x_2$

7. Высказывания 1), 2) — истинные, а 3) и 5) — ложные. Предложения 4), 6), 7), 8) не являются высказываниями.

8. Высказывания 4) и 6) — простые, а 1) — 3) и 5) — составные. В высказываниях 1), 2), 3), 5) грамматические связки соответственно «не», «и», «если..., то», «или».

9. 1) число 35 делится на число 7; 2) $6 \leq 3$; 3) $4 > 7$; 4) кислород — не газ.

10. x — «сегодня понедельник»; y — «сегодня вторник»; z — «идет дождь»; υ — «идет снег»; w — «крыши мокрые»; 1) $x\nabla y$; 2) $z \vee \upsilon$; 3) $z \to w$.

11. 1) я не учусь в школе; 2) неверно, что я не учусь в школе; 3) я учусь в школе и люблю биологию; 4) я учусь в школе и не люблю биологию; 5) я не учусь в школе и люблю биологию; 6) я не учусь в школе и не люблю биологию; 7) неверно, что я учусь в школе и люблю биологию

12. Высказывания 1), 3) и 4) — истинные, а высказывание 2) ложно.

13. 1) студент Петров не изучает немецкий язык и успевает по дискретной математике; 2) если студент Петров изучает немецкий язык, то он успевает по дискретной математике; 3) студент Петров не успевает по дискретной математике тогда и только тогда, когда он не изучает немецкий язык.

14.

x	$\bar{x}$	y	$\bar{x} \vee y$
0	1	0	1
1	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	1

15.

x	y	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{x} \vee \bar{y}$
0	0	1	1	1
1	0	0	1	1
0	1	1	0	1
1	1	0	0	0

16.

x	y	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$x \wedge \bar{y}$	$\bar{x} \vee y$	$(x \wedge \bar{y}) \to (\bar{x} \vee y)$
0	0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	0	0	1	1

18. $(\overline{x \vee y} \to \bar{x} \vee y) \wedge y = y$.

Глава 6

1. а) 3; б) 2; в) 1; г) 2; д) 1; е) 3.

3. $a = \frac{5}{3}; c = \frac{27}{25}$.

4. а) $x_{n+2} = 1{,}25x_n$; б) второй; в) $x_2 = 2000$; $x_4 = 2500$.

5. $x_n = x_0 + 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$.

6. $x_n = 3^n x_0$.

7. $x_n = \frac{(n+4)(n+3)}{12} x_0$.

8. $x_n = 0$, $n \geq 1$.

9. $x_n = (-1)^n x_0$.

10. $x_n = 2^{-n}$.

11. $x_n = 1 + \frac{1-e^{-n}}{1-e^{-1}}$.

12. $x_n = n + 1$.

13. $x_n = 2 \cdot 3^n - 1$.

14. $x_n = k_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + k_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$.

15. $x_n = k_1 + k_2(-3)^n$.

16. $x_n = k_1(-2)^n + k_2(-2)^{n-1}n$.

17. $x_n = k_1 + k_2\left(-\frac{1}{3}\right)^n$.

18. $x_n = 2^n$.

19. $x_n = 2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{3n\pi}{2} + 3\sin\frac{3n\pi}{4}\right)$.

20. $x_n = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{3}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$.

21. $\theta = 20 + 80\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}}$.

22. $a = 89$; $t = 1$.

23. Через 3 ч. Увеличится в 8 раз.

Глава 7

1. 0,05.
2. 0,5.
3. 0,81.
4. 0,02.

5. 0,05.
6. 0,005.
7. 0,7.
8. 0,96.
9. $\frac{1}{3}$.
10. 0,5.
11. 0,2.
12. 0,6.
13. $\frac{3}{35}$.
14. 0,1.
15. $\frac{1}{105}$.
16. 0,56.
17. 0,25.
18. 0,56.
19. а) 0,25; б) 0,5.
20. 0,91.
21. $\frac{1}{3}$.
22. $\frac{2}{3}$.
23. 0,85.
24. 0,9.
25. $P(A) = 0{,}2$.
26. $\frac{15}{28}$.
27. $\frac{1}{6}$.
28. $\frac{1}{840}$.
29.

X	1	2	3	4	5	6
p	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

30.

X	0	100	5000
p	0,89	0,1	0,01

31. 2,2.
32. 60 р.
33. 3,9.
34. 0,7 попаданий.
35. 7.
36. 12,25.
37. 32,56.
38. 2,01.
39. 7.
40. а) 5; б) 20; в) 45.
41. $M(X) = 0,1$ и $D(X) = 1,29$.
42. $M(X)=4,7$ и $D(X) = 3,01$.
43. $M(X) = 8$ и $D(X) = 8$.
44. а) прибавится a; б) не изменится.
45. а) умножится на a; б) умножится на a^2.
46. $D(X) = l$, $\sigma(X)=l$.
47. 2,5.
48. $M(X) = 11$; $D(X)=33$; $\sigma(X) \approx 5,75$.
49. $\upsilon_1=4,6$; $\upsilon_2 = 21,8$.
50. $\mu_2 = 0,64$.
51. $\frac{27}{64}$.
52. $\frac{80}{243}$.
53. $\frac{80}{243}$.
54. $\frac{13}{16}$.
55. а) 0,384; б) 0,896.
56. 0,31.
57.

X	0	1	2	3
p	0,008	0,096	0,384	0,512

58. 0,375.
59. 6 попаданий.
60. 6 билетов.
61. 21.
62. а) 100 изделий; б) 98.
63. 2,4
64. 0,48.

65. $\frac{1}{3}$.

66. 0,5.

67. $F(x)=\begin{cases} 0 \text{ при } x \le 0, \\ \sin x \text{ при } 0 < x \le \frac{\pi}{2}, \\ 1 \text{ при } x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

68. $A=\frac{1}{\pi}$; $F(x)=\frac{2}{\pi}\text{arctg}e^{x}$.

69. $M(X) = 2$.

70. $M(X)=\frac{1}{2}$; $D(X)=\frac{1}{12}$.

71. $f(x)=\frac{1}{5{,}5\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-164)^2}{60{,}5}}$.

72. 0,9759.
73. 0,77453.
74. 0,184.
75. 0,003.
76. 0.0162
77. 0,99945.

Глава 8

1. 3, 4, 5, 2, 1 Большему числу в ряду ставится больший ранг; 3, 2, 1, 4, 5 Большему числу в ряду ставится меньший ранг.

2. а) 2,3,3,4,5,6,6,7,7,7;
б)

x_i	2	3	4	5	6	7
n_i	1	2	1	1	2	3

или

x_i	2	3	4	5	6	7
p_i^*	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$

7. $\bar{x}_г = 191{,}4$; $D_г = 8{,}04$.
8. $\bar{x}_в = 4$.
9. $\bar{x}_в = 5{,}76$.

10. $\bar{x}_в = 1269$.
11. а) 9,67 мм; б) 7,1 см.
12. $D_В \approx 0,0007$.
13. $s^2 \approx 3,075$.
14. $s^2 \approx 6,93$.
15. $s^2 \approx 0,0525$.
16. $\bar{x}_в = 100$; $D_в = 34$; $s^2 = 42,5$.
17. $\bar{x}_в = 166$; $D_в = 33,44$.
18. $12,04 < a < 15,96$.
19. а) $7,63 < a < 12,77$; б) $14,23 < a < 19,37$.
20. $0,3 < a < 3,7$.
21. $3,12 < \bar{x}_г < 5,08$.
22. $18,57 < \bar{x}_г < 21,67$.
23. $19,774 < \bar{x}_г < 20,626$.
24. $11,512 < \bar{x}_г < 16,888$.
25. $0,544 < \sigma < 1,056$.
26. $r_в \approx 0,792$.
27. $T_0 = 5$; $t(0.05;120) = 1,98$. Нулевая гипотеза отвергается.
28. $\chi_0^2 = 2,5$; $\chi^2(0,05; 4) = 9,5$. Нет оснований отвергнуть гипотезу.
29. $\chi_0^2 = 13$; $\chi^2(0,05; 4) = 9,5$. Гипотеза отвергается.
30. $\rho_в = 1/3 = 0,33$; ранговая корреляционная связь при уровне значимости 0,05 незначима.
31. $38,469 < a < 46,169$.
32. $0,03 < \sigma < 0,21$.
33. $22,948 < a < 23,374$; $0,224 < \sigma < 0,576$.
34. $a = 5.4$; $b = -2.9$.

ДЛЯ ЗАМЕТОК

Баврин Иван Иванович
Математическая обработка информации

Оформление обложки *Зотова Н. Г.*
Компьютерная верстка *Асташин Е. О.*

Издательство «Прометей»
115035, Москва, ул. Садовническая, д.72, стр.1
Тел/факс: 8 (495) 799-54-29
E-mail: info@prometej.su

Подписано в печать 31.03.2016. Формат 60×90/16.
Бум. офсетная. Печать цифровая. Объем 16,375 п.л.
Тираж 500 экз. Заказ № 536.

ISBN 978-5-9908018-9-9

9 785990 801899